

Guidance Series for Mathematics Majors
数学类专业学习辅导丛书

数学分析（第三版）习题全解指南

（下册）

陈纪修 徐惠平 周渊 金路 邱维元

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的《数学分析》(第三版)相配套的学习辅导书,是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"和教育部"理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析"项目的成果,全书内容包含了教材中全部习题的详细解答,也包括了补充习题资源中部分有难度的习题的解答提示。

本书不仅可作为高等学校学习数学分析课程的学生的学习参考书与讲授数学分析课程的教师的教学参考书,也可作为准备报考高等学校理工科各专业研究生的学生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第3版)习题全解指南. 下册 / 陈纪修等编. --北京:高等教育出版社,2020.6 (2021.5 重印)
ISBN 978-7-04-053911-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①数学分析-高等学校-题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第050168号

项目策划 李艳馥 李 蕊 兰莹莹 策划编辑 李 蕊 责任编辑 安 琪 封面设计 王凌波
版式设计 杜微言 插图绘制 李沛蓉 责任校对 李大鹏 责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	16.25		
字 数	400千字	版 次	2020年6月第1版
购书热线	010-58581118	印 次	2021年5月第3次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	34.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 53911-00

目录

第九章　数项级数 …… 1

§1　数项级数的收敛性 …… 1

§2　上极限与下极限 …… 3

§3　正项级数 …… 6

§4　任意项级数 …… 12

§5　无穷乘积 …… 20

第十章　函数项级数 …… 25

§1　函数项级数的一致收敛性 …… 25

§2　一致收敛级数的判别与性质 …… 32

§3　幂级数 …… 40

§4　函数的幂级数展开 …… 49

§5　用多项式逼近连续函数 …… 56

第十一章　Euclid 空间上的极限和连续 …… 59

§1　Euclid 空间上的基本定理 …… 59

§2　多元连续函数 …… 62

§3　连续函数的性质 …… 69

第十二章　多元函数的微分学 …… 74

§1　偏导数与全微分 …… 74

§2　多元复合函数的求导法则 …… 84

§3　中值定理和 Taylor 公式 …… 93

§4　隐函数 …… 95

§5　偏导数在几何中的应用 …… 106

§6　无条件极值 …… 111

§7　条件极值问题与 Lagrange 乘数法 …… 122

第十三章　重积分 …… 133

§1　有界闭区域上的重积分 …… 133

§2　重积分的性质与计算 …… 135

§3　重积分的变量代换 …… 144

§4　反常重积分 …… 154

§5　微分形式 …… 157

第十四章　曲线积分、曲面积分与场论 …… 160
§1　第一类曲线积分与第一类曲面积分 …… 160
§2　第二类曲线积分与第二类曲面积分 …… 169
§3　Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式 …… 175
§4　微分形式的外微分 …… 188
§5　场论初步 …… 189
第十五章　含参变量积分 …… 198
§1　含参变量的常义积分 …… 198
§2　含参变量的反常积分 …… 205
§3　Euler 积分 …… 213
第十六章　Fourier 级数 …… 221
§1　函数的 Fourier 级数展开 …… 221
§2　Fourier 级数的收敛判别法 …… 230
§3　Fourier 级数的性质 …… 235
§4　Fourier 变换和 Fourier 积分 …… 238
§5　快速 Fourier 变换 …… 240
部分补充习题答案与提示 …… 246

第九章 数项级数

§1 数项级数的收敛性

1. 讨论下列级数的敛散性. 收敛的话,试求出级数之和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}\right)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta(|q|<1)$.

解　(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$,

所以　　$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3}{4}$.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{2}{3}\neq 0$,所以级数发散.

(3) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$,

所以　　$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$.

(4) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2^k}-\dfrac{1}{3^k}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$,所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}.$$

(5) 因为$\lim_{n\to\infty}x_n=1\neq 0$,所以级数发散.

(6) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5^{k-1}+4^{k+1}}{3^{2k}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}}+\frac{16}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$,所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=3\frac{9}{20}.$$

(7) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$,所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\sqrt{2}+1.$$

(8) 设$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}$,则$3S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{3^k}$,两式相减,得到

$$2S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k}-\frac{2n-1}{3^n}=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n},$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

(9) $\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1-(qe^{i\theta})^{n+1}}{1-qe^{i\theta}}$,由$|q|<1$,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n e^{in\theta}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1}{1-qe^{i\theta}}.$$

利用 Euler 公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,对上式两边取实部,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta=\frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}.$$

2. 确定x的范围,使下列级数收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x)^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$.

解　(1) 由$-1<\frac{1}{1-x}<1$解得$x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

(2) 由$e^x<1$解得$x\in(-\infty,0)$.

(3) 当$x=1$时,显然级数收敛;当$x\neq 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}x^n$,收敛范围是$x\in(-1,1)$. 所以当$x\in(-1,1]$时,级数收敛.

3. 求八进制无限循环小数$(36.073\ 607\ 360\ 7\cdots)_8$的值.

解　$(36.073\ 607\ 360\ 7\cdots)_8$

$$=3\times 8+6+\sum_{n=0}^{\infty}\left[7\times\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+2}+3\times\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+3}+6\times\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+4}\right]=30\frac{478}{4\,095}.$$

4. 设 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的和.

解 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$,

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}.$$

5. 设抛物线 $l_n:y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $l_n':y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 求抛物线 l_n 与 l_n' 所围成的平面图形的面积 S_n;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

解 (1) 容易求出抛物线 $l_n:y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $l_n':y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,于是

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-\left((n+1)x^2+\frac{1}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a_n^3;$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}$.

§2 上极限与下极限

1. 求下列数列的上极限与下极限:

(1) $x_n=\frac{n}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{5}$;　　(2) $x_n=n+(-1)^n\frac{n^2+1}{n}$;

(3) $x_n=-n[(-1)^n+2]$;　　(4) $x_n=\sqrt[n]{n+1}+\sin\frac{n\pi}{3}$;

(5) $x_n=2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

解 (1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\frac{1}{2}$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}$.

(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=+\infty$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=0$.

(3) $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\infty$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\infty$.

(4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(5) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=5$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-5$.

2. 证明:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$;　　(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(cx_n)=\begin{cases}c\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n, c>0,\\ c\,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n, c<0.\end{cases}$

证　仅对$\{x_n\}$是有界数列的情况给出证明.

(1) 设$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\eta$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得$x_n>\eta-\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{x_n\}$中有无穷多项,满足$x_n<\eta+\varepsilon$;于是$-x_n<-\eta+\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{-x_n\}$中有无穷多项,满足$-x_n>-\eta-\varepsilon$;于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=-\eta=-\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

(2) 设$c>0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\xi$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得$x_n<\xi+\frac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立,且$\{x_n\}$中有无穷多项,满足$x_n>\xi-\frac{\varepsilon}{c}$;于是$cx_n<c\xi+\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{cx_n\}$中有无穷多项,满足$cx_n>c\xi-\varepsilon$;所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n)=c\xi=c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

设$c<0$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\eta$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得$x_n>\eta+\frac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立,且$\{x_n\}$中有无穷多项,满足$x_n<\eta-\frac{\varepsilon}{c}$;于是$cx_n<c\eta+\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{cx_n\}$中有无穷多项,满足$cx_n>c\eta-\varepsilon$;所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n)=c\eta=c\,\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

3. 证明:

(1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

证　(1) 记$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h_1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=h_2$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,对一切$n>N$,成立$x_n>h_1-\frac{\varepsilon}{2}$, $y_n>h_2-\frac{\varepsilon}{2}$,即

$$x_n+y_n>h_1+h_2-\varepsilon,$$

于是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant h_1+h_2-\varepsilon.$$

由ε的任意性,得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant h_1+h_2=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则由(1),

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

且

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}[(x_n+y_n)-x_n] \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) + \underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$$
$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n,$$

两式结合即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$-\infty < x < 0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n;$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$-\infty < x < 0$，可知对任意给定的 $\varepsilon(0 < \varepsilon < -x)$，存在正整数 N_1，对一切 $n > N_1$，成立

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon < 0.$$

记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = H$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = h$，则对上述 $\varepsilon(0 < \varepsilon < -x)$，存在正整数 N_2，对一切 $n > N_2$，成立

$$h - \varepsilon < y_n < H + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，成立

$$\min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\} < x_n y_n < \max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\},$$

于是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \geqslant \min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\},$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\},$$

由 ε 的任意性，即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \geqslant xH = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant xh = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

由于

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n),$$

又得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

将此两式与前面两式结合，即得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

§3　正项级数

1. 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n}{n^4+1}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2}{n^3+3n}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$；　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$；

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$；　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$；　(16) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$；

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)$.

解　(1) 因为$\dfrac{4n}{n^4+1}\sim\dfrac{4}{n^3}(n\to\infty)$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^3}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n}{n^4+1}$收敛.

(2) 因为$\dfrac{2n^2}{n^3+3n}\sim\dfrac{2}{n}(n\to\infty)$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n}$发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2}{n^3+3n}$发散.

(3) 因为$\dfrac{1}{\ln^2 n}>\dfrac{1}{n}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$发散.

(4) 因为当 $n\geqslant 4$ 时有$\dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{n^2}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$收敛.

(5) 因为$\dfrac{\ln n}{n^2}<\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$收敛.

(6) $1-\cos\dfrac{\pi}{n}=2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}\sim\dfrac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty)$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$收敛.

(7) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$发散.

(8) 因为当 $n\geqslant 3$ 时,有

$$\sqrt[n]{n}-1>e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}(n\to\infty),$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 发散.

(9) 设 $x_n=\frac{n^2}{2^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

(10) 设 $x_n=\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\frac{3}{4}<1,$$

由 Cauchy 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$ 收敛.

(11) 设 $x_n=n^2e^{-n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{e}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$ 收敛.

(12) 设 $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{e}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(13) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ 发散.

(14) $2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{2(n^2-\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)})}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{1}{n^2+\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}}\sim\frac{1}{4n^3}(n\to\infty)$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^3}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ 收敛.

(15) $\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}=\ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)\sim\frac{2}{n^2}(n\to\infty)$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$

收敛.

(16) $-\ln\cos\frac{\pi}{n}=-\ln\left[1-\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]=-\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\sim\frac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty)$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(17) 设 $x_n=\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}a, & 0<a<1,\\ \frac{1}{2}, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases}$$

由 d'Alembert 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)$ 收敛.

2. 利用级数收敛的必要条件，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$.

证　(1) 设 $x_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=0$，由 d'Alembert 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

(2) 设 $x_n=\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^{2(n+1)}}=0$，由 d'Alembert 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$.

3. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$；　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解　(1) 设 $x_n=\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=a,$$

由 Raabe 判别法：

当 $a>1$ 时，级数收敛；

当 $0<a<1$ 时，级数发散；

当 $a=1$，$x_n=\frac{1}{n+1}$，级数发散.

(2) 设 $x_n=\frac{1}{3^{\ln n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 3>1,$$

由 Raabe 判别法,级数收敛.

(3) 设 $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$,则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 2<1,$$

由 Raabe 判别法,级数发散.

4. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $n\geqslant 2$,有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{2x}\mathrm{d}x<\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x>\frac{1}{4n^2\pi^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{8n\pi}$,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n\pi}$发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

(3) $\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n^2}$,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

5. 利用不等式$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在.(此极限为 Euler 常数 γ—见例 2.4.8.)

证 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$,则

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<0,$$

$$x_n>\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}>0,$$

所以数列$\{x_n\}$单调减少有下界,因此收敛.

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是两个正项级数,若$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$ 或 $+\infty$,请问这两个级数的敛散性关系如何?

解 若$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$,则当 n 充分大时有 $x_n<y_n$,所以当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$必定收

敛，当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 必定发散；

若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$，则当 n 充分大时有 $x_n>y_n$，所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 必定发散，当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 必定收敛.

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 也收敛；反之如何？

解　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$，所以当 n 充分大时，有 $0\leqslant x_n<1$，即有 $x_n^2\leqslant x_n$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛；反之，当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不一定收敛. 例如 $x_n=\frac{1}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛；又问当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，结论是否仍然成立？

解　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 当 $p>\frac{1}{2}$ 时，由

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

以及 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 的收敛性，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 不一定收敛. 例如 $x_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 发散.

9. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$，

（1）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛，并求其和；

（2）进一步设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

证　（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 的部分和为 $S_n=f(n+1)-f(1)$，由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 得到 $S=\lim_{n\to\infty} S_n=A-f(1)$；

（2）由 Lagrange 中值定理以及 $f'(x)$ 单调减少，得到

$$0\leqslant f'(n)<f'(\xi)=f(n)-f(n-1),$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，即得到 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.

10. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的和;

(2) 设 $\lambda>0$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

证 (1) $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1;$$

(2) 由 $a_n>0$ 及 $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$,可知 $a_n<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$,于是 $\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}$,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛,可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

11. 设 $x_n>0,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,证明 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

证 由 $x_n>0,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}$,得到

$$(n-1)x_n<nx_{n+1},$$

即数列 $\{nx_{n+1}\}$ 单调增加. 于是存在 $\alpha>0$,使得 $nx_{n+1}\geqslant\alpha$,因而

$$x_{n+1}\geqslant\frac{\alpha}{n}.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n}$ 发散即可知 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

12. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散($x_n>0,n=1,2,\cdots$),证明:必存在发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$,使得 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$.

证 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$,则 $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 令

$$y_1=\sqrt{S_1},y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

于是 $\sum_{k=1}^{n}y_k=\sqrt{S_n}$,即 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是发散的正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=0.$$

13. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散,$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$ 收敛.

证 由 $S_n\geqslant S_{n-1}$,可知

$$\frac{x_n}{S_n^2} \leqslant \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$

由此得到 $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{S_k^2} \leqslant \frac{2}{x_1} - \frac{1}{S_n}$. 由 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{S_n^2} \leqslant \frac{2}{x_1}.$$

14. 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列（见例 2.4.4），证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 收敛，并求其和.

解　首先，Fibonacci 数列具有性质 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 与 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2$. 设 $x_n = \frac{a_n}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} < 1,$$

由 d'Alembert 判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 收敛.

设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$，则 $2S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{2^n}$，两式相加得到

$$3S = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^n} = 4S - a_1 - a_2,$$

于是

$$S = a_1 + a_2 = 2.$$

§4　任意项级数

1. 讨论下列级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）：

(1) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5} - \cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ $(x \neq -n)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{x}{n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$；

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cos(n-1)x}{n^p}$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} x^n$；

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$；

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q n}$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}(a>0)$.

解 (1) 设级数 $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5}-\cdots$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$,则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)!},$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 发散,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$,因此级数 $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5}-\cdots$ 发散.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}(x\neq -n)$ 当 n 充分大(即 $n+x>0$)时是交错级数,且 $\left\{\dfrac{1}{n+x}\right\}$ 单调减少趋于零,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ $(x\neq -n)$ 收敛;又由于 $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right|\sim\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ $(x\neq -n)$ 条件收敛.

(3) 当 $x=0$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$ 的一般项为零,所以级数绝对收敛.

设 $x\neq 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$ 当 n 充分大$\left(\text{即 } n>\dfrac{2|x|}{\pi}\right)$时是交错级数,且 $\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|$ 单调减少趋于零,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$ 收敛;又由于 $\left|(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}\right|\sim\dfrac{|x|}{n}(n\to\infty)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n}$ 发散,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$ 条件收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 是交错级数,当 $n\geqslant 8$ 时,$\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 单调减少趋于零,所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 收敛;又由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 发散,所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛.

(6) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$,则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{3n-1}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}$ 都是 Leibniz 级数,即都是收敛的,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{6n}$ 存在且有限. 容易证明

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},$$

由此可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3}$ 收敛.

由于$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right|\geqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$条件收敛.

(7) 当$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$时，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2x)^n$，$0\leqslant4\sin^2x<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2x)^n$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$绝对收敛.

当$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$时，$\sin^2x=\frac{1}{4}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$是条件收敛级数.

在其他情况下，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2x)^n$，$4\sin^2x>1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散.

(8) 当$x=\frac{k\pi}{2}$时，级数的一般项为零，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$绝对收敛.

设$x\neq\frac{k\pi}{2}$. 当$p>1$时，由于$\left|\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$绝对收敛.

当$0<p\leqslant1$时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\frac{\sin 2nx}{2n^p}+\frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由Dirichlet判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n^p}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{2n^p}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$发散.

当$p\leqslant0$时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$发散.

(9) 设$x_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{|x|}{2}$，所以

当$|x|<2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$绝对收敛；

当$|x|>2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$发散；

当$|x|=2$时，级数的一般项不趋于零，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$也发散.

(10) 设$u_n=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$. 由于$\{u_n\}$单调减少趋于零，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$是Leibniz级数，因此收敛.

因为 $u_n \sim \frac{\ln 2}{3n}(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{3n}$发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$条件收敛.

(11) 设 $x_n=\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=|x|$，所以

当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$绝对收敛；

当 $|x|>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$发散；

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $q>1$ 时级数绝对收敛，在其他情况下级数发散；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $q>1$ 时级数绝对收敛，当 $p=1$ 且 $q\leqslant 1$ 或 $0<p<1$ 或 $p=0$ 且 $q>0$ 时级数条件收敛，在其他情况下级数发散.

(12) 设 $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$.

当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{1}{a}<1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$绝对收敛；

当 $a=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当 $0<a<1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛；$\left\{\frac{a}{1+a^n}\right\}$单调有界，由 Abel 判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$收敛，但由于 $|x_n|\sim\frac{a}{n}(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$发散，所以级数条件收敛.

2. 利用 Cauchy 收敛原理证明下列级数发散：

(1) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$；

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$.

证 (1) 设级数的一般项为 x_n，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散.

(2) 设级数的一般项为 x_n，则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n}>\frac{n}{6n}=\frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大，由 Cauchy 收敛原理可知级数发散.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\{x_n\}$单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$.

证　由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N'>0$，对一切 $m>n>N'$，成立

$$0<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=2N'+3$，则当 $n>N$ 时，有 $\left[\frac{n}{2}\right]>N'+1$，于是成立

$$0<\frac{n}{2}x_n<x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+x_n<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$0<nx_n<\varepsilon.$$

4. 若对任意 $\varepsilon>0$ 和任意正整数 p，存在 $N(\varepsilon,p)$，使得

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|<\varepsilon$$

对一切 $n>N$ 成立，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是否收敛？

解　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不一定收敛.

例如：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但对任意 $\varepsilon>0$ 和任意正整数 p，取 $N(\varepsilon,p)=\left[\frac{p}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N(\varepsilon,p)$ 时，

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|<\frac{p}{n+1}<\varepsilon.$$

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛？

解　$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛.

反例：$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散.

6. 设 $x_n\geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，问交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 是否收敛？

解　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 不一定收敛.

反例：$x_n=\begin{cases}\frac{1}{k}, & n=2k,\\ \frac{1}{k^2}, & n=2k-1,\end{cases}$ 则 $x_n\geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 发散.

7. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 发散. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是

否收敛？并说明理由.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛.

因为正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，所以必定收敛. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 是 Leibniz 级数，因此收敛，与条件矛盾，所以必定有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$. 于是当 n 充分大时，$\left(\dfrac{1}{1+x_n}\right)^n<\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{\alpha}{2}}\right)^n$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛.

8. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛，则当 $\alpha>\alpha_0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛.

证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^{\alpha}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right)$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛，$\left\{\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right\}$ 单调有界，利用 Abel 判别法，可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^{\alpha}}$ 收敛.

注 本题也可利用 Dirichlet 判别法证明.

9. 若 $\{nx_n\}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

证 令 $a_n=x_n$，$b_n=1$，则 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i=k$. 利用 Abel 变换，得到

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=nx_n-\sum_{k=1}^{n-1}k(x_{k+1}-x_k).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(x_{n+1}-x_n)\cdot\frac{n}{n+1}\right],$$

因为数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 单调有界，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(x_{n+1}-x_n)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$ 收敛，由 Abel判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x_{n+1}-x_n)$ 收敛. 再由数列 $\{nx_n\}$ 的收敛性，即可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

10. 若 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_ny_n$ 收敛.

证 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}^+$，成立 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}y_k\right|<\varepsilon$. 由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 绝对收敛，所以收敛，于是可知 $\{x_n\}$ 有界.

设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|x_n-x_{n-1}|=A$，$|x_n|\leqslant B$，令 $B_{n+k}=y_{n+1}+y_{n+2}+\cdots+y_{n+k}$，利用 Abel 变换，得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_ky_k\right|=\left|x_{n+p}B_{n+p}-\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(x_{k+1}-x_k)B_k\right|<(A+B)\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理，可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛.

11. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可知 $f(0)=0, f'(0)=0$，于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}(n\to\infty),$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

12. 已知任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x_n$ 也发散.

证　采用反证法. 令 $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，因为 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 单调有界，则由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}y_n$ 收敛，与条件矛盾，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x_n$ 发散.

13. 设 $x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$，证明：交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 收敛.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\gamma>0$，首先可知当 n 充分大时有 $x_n>x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时是单调减少的. 然后取 $\alpha>0,\beta>0$，使得 $\gamma>\beta>\alpha>0$，可知当 n 充分大时，成立

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{\beta}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

从而

$$(n+1)^{\alpha}x_{n+1}<n^{\alpha}x_n,$$

这说明数列 $\{n^{\alpha}x_n\}$ 当 n 充分大时也是单调减少的，于是存在 $A>0$，使得 $n^{\alpha}x_n\leqslant A$，即

$$0<x_n\leqslant\frac{A}{n^{\alpha}},$$

从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零. 因此交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 是 Leibniz 级数，所以收敛.

14. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma(n\to\infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数（见例 2.4.8），求下述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

解　设 $b_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，设级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

的部分和数列为$\{S_n\}$,则

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)+\frac{1}{2}(b_{2n}+\ln 2n)=b_{4n}+\ln 4n,$$

于是

$$S_{3n}=b_{4n}-\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{3}{2}\ln 2.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma$,得到

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{3}{2}\ln 2.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}\ln 2.$$

15. 利用级数的 Cauchy 乘积证明:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$;

(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}(|q|<1)$.

解 (1) 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$,则$c_0=1$,且当$n\geqslant 1$时,

$$c_n=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^j}{i!\cdot j!}=\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\cdot j!}(-1)^j=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$$

(2) 设$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$,则

$$c_n=\sum_{i+j=n}(q^iq^j)=(n+1)q^n.$$

又由于$|q|<1$,所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$,从而得到

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}(|q|<1).$$

§5　无穷乘积

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$；　(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$；

(3) $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$；　(4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$；

(5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$；　(6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$；

(7) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$；　(8) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$；

(9) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]$；　(10) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ $(p,q>0)$.

解　(1)
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right),$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ 收敛.

(2)
$$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}=\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right)\right],$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1=\sqrt{1+\frac{2}{n-1}}-1\sim\frac{1}{n-1}\ (n\to\infty),$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，所以 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ 发散.

(3)
$$\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\prod_{n=3}^{\infty}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right),$$

由于 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$ 收敛.

(4)
$$\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$1-n\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^2}(n\to\infty),$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 收敛.

(5)
$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n^x}}-1\right)\right],$$

当 $x>0$ 时，$e^{\frac{1}{n^x}}-1\sim\frac{1}{n^x}$ $(n\to\infty)$.

当 $x>1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$ 收敛；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 发散，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$ 发散.

当 $x\leqslant 0$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$ 的一般项不趋于 1，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$ 发散.

(6) 因为对任意 x，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 收敛.

(7) 当 $|x|<2$ 时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$ 收敛；

当 $|x|\geqslant 2$ 时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ 发散，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$ 发散.

(8) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right)\right]$，

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\sim\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty),$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ 收敛.

(9) $\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]$ 收敛.

(10) $\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots\right)=1+\frac{1}{n^p}-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots$，

由此可知

当 $\min(p,2q)>1$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 收敛；

当 $\min(p,2q)\leqslant 1$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 发散.

2. 计算下列无穷乘积的值：

(1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；　　(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$；

(3) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

解 (1) 由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

（2）由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}.$$

（3）由于

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}.$$

3. 设 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

证　设 $\cos x_n=1-\alpha_n$，则

$$0<\alpha_n=1-\cos x_n=2\sin^2\frac{x_n}{2}<\frac{1}{2}x_n^2,$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

4. 设 $|a_n|<\frac{\pi}{4}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$ 绝对收敛.

证　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 设

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)=\frac{1+\tan a_n}{1-\tan a_n}=1+\alpha_n,$$

则

$$\alpha_n=\frac{2\tan a_n}{1-\tan a_n},\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}=2,$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$ 绝对收敛.

5. 证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=0\ (0<\beta<\alpha)$.

证　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$，由于

$$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim-\frac{1}{2n}\ (n\to\infty),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=-\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=0.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)$,

由于

$$\ln\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)\sim\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\ (n\to\infty),\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=0.$$

6. 设 $|q|<1$,证明: $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\dfrac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$.

证 设 $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+q^k)$,则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^k)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k})\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})},$$

由于 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$收敛,所以

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})=1,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}P_{2n}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}.$$

7. 设 $a_{2n-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{n}},a_{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散,但无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$收敛.

证 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

由于$\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\sim\frac{1}{k}(k\to\infty)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=+\infty,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；又由于$a_{2n-1}^2=\frac{1}{n}$，$a_{2n}^2>\frac{1}{n}$可知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也发散.

设$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$，则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

所以$\lim_{n\to\infty}P_{2n}$存在且非零. 由于

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}P_{2n},$$

所以$\lim_{n\to\infty}P_n$存在且非零，即无穷乘积$\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$收敛.

第十章
函数项级数

§1 函数项级数的一致收敛性

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性：

(1) $S_n(x)=e^{-nx}$, (i) $x\in(0,1)$, (ii) $x\in(1,+\infty)$;

(2) $S_n(x)=xe^{-nx}$, $x\in(0,+\infty)$;

(3) $S_n(x)=\sin\frac{x}{n}$, (i) $x\in(-\infty,+\infty)$,

(ii) $x\in[-A,A](A>0)$;

(4) $S_n(x)=\arctan nx$, (i) $x\in(0,1)$, (ii) $x\in(1,+\infty)$;

(5) $S_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $S_n(x)=nx(1-x)^n$, $x\in[0,1]$;

(7) $S_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$, (i) $x\in(0,1)$, (ii) $x\in(1,+\infty)$;

(8) $S_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$, (i) $x\in(0,1)$, (ii) $x\in(1,+\infty)$;

(9) $S_n(x)=(\sin x)^n$, $x\in[0,\pi]$;

(10) $S_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$, (i) $x\in[0,\pi]$,

(ii) $x\in[\delta,\pi-\delta](\delta>0)$;

(11) $S_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, (i) $x\in(-\infty,+\infty)$,

(ii) $x\in[-A,A](A>0)$;

(12) $S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, (i) $x\in(0,+\infty)$,

(ii) $x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$.

解 (1) (i) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=1\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛.

(ii) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\mathrm{e}^{-n}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛.

(2) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{n\mathrm{e}}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛.

(3) (i) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=1\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛.

(ii) $S(x)=0$,当$n>\frac{2A}{\pi}$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[-A,A]}|S_n(x)-S(x)|\leqslant\frac{A}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[-A,A]$上一致收敛.

(4) (i) $S(x)=\frac{\pi}{2}$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\pi}{2}\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛.

(ii) $S(x)=\frac{\pi}{2}$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\pi}{2}-\arctan n\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛.

(5) $S(x)=|x|$,由于$|S_n(x)-S(x)|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\leqslant\frac{1}{n}$,于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(6) $S(x)=0$,

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛.

(7) (i) $S(x)=0$,由于$S_n(0+)-S(0+)=0$,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[S_n(x)-S(x)]=\frac{1}{n}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)<0\ (n>2),$$

于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\ln n}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上一致收敛.

(ii) $S(x)=0$,

$$S_n(2n)-S(2n)=2\ln 2\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛.

(8) (i) $S(x)=0$,

$$S_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-S\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛.

(ii) $S(x)=1$,

$$S_n\left(1+\frac{1}{n}\right)-S\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛.

(9) $S(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x\in[0,\pi],x\neq\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 取$x_n\in[0,\pi]$,使得$\sin x_n=1-\dfrac{1}{n}$,则$x_n\neq\dfrac{\pi}{2}$,

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,\pi]$上非一致收敛.

(10) (i) $S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\pi,\\ 1, & 0<x<\pi,\end{cases}$ 取$x_n\in(0,\pi)$,使得$\sin x_n=\dfrac{1}{2^n}$,则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{2}-1\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,\pi]$上非一致收敛.

(ii) $S(x)=1$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]}|S_n(x)-S(x)|=1-\sin^{\frac{1}{n}}\delta\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,\pi-\delta]$上一致收敛.

(11) (i) $S(x)=e^x$,

$$S_n(n)-S(n)=2^n-e^n\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛.

(ii) 令$f_n(x)=e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$,其中$x\in[-A,A]$,$n>A$. 设$g_n(x)=\ln f_n(x)$,则

$$g_n'(x)=\frac{n}{n+x}-1\begin{cases}>0, & -A\leqslant x<0,\\ =0, & x=0,\\ <0, & 0<x\leqslant A.\end{cases}$$

于是对$x\in[-A,A]$,

$$\min\{g_n(A),g_n(-A)\}\leqslant g_n(x)\leqslant g_n(0)=0,$$
$$\min\{f_n(A),f_n(-A)\}\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(0)=1,$$
$$0\leqslant 1-f_n(x)\leqslant 1-\min\{f_n(A),f_n(-A)\}\to 0(n\to\infty),$$

由此得到

$$\sup_{x\in[-A,A]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[-A,A]}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|$$
$$\leqslant \mathrm{e}^A\sup_{x\in[-A,A]}\{1-f_n(x)\}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[-A,A]$上一致收敛.

(12) (i) $S(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{n}\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛.

(ii) $S(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}=S(x),$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[S_n(x)-S(x)]=\frac{-1}{2\sqrt{x\left(x+\frac{1}{n}\right)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}>0,$$

可知

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=|S_n(\delta)-S(\delta)|$$
$$=-n\left(\sqrt{\delta+\frac{1}{n}}-\sqrt{\delta}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\delta}}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛.

2. 设$S_n(x)=n(x^n-x^{2n})$,则函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛但不一致收敛,且极限运算与积分运算不能交换,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛于$S(x)=0$. 取$x_n=1-\dfrac{1}{n}$,则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]\to+\infty,$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(x^n-x^{2n})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx.$$

3. 设 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,则

(1) 函数序列$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛;

(2) $\left\{\dfrac{d}{dx}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛;

(3) 极限运算与求导运算不能交换,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

并不对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立.

解 (1) $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$,$S(x)=0$,则

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) $\dfrac{d}{dx}S_n(x)=\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$,$\sigma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d}{dx}S_n(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$

取$x_n=\dfrac{1}{2n}$,则

$$\frac{d}{dx}S_n(x_n)-\sigma(x_n)=\frac{12}{25}\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\left\{\dfrac{d}{dx}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

(3) 由于在$x=0$处,

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,\sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=1,$$

所以在$x=0$处,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

不成立.

4. 设$S_n(x)=\dfrac{1}{n}\arctan x^n$,则函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛;试问极限运算与求导运算能否交换,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

是否成立?

解 $$S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n,S_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,S'(x)=0,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(1)=\dfrac{1}{2}\neq S'(1)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

在 $x=1$ 处不成立.

5. 设 $S_n(x)=n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx}$,其中 α 是参数. 求 α 的取值范围,使得函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上

(1) 一致收敛;

(2) 积分运算与极限运算可以交换,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 求导运算与极限运算可以交换,即对一切 $x\in[0,1]$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

解　(1) $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$,令 $S_n'(x)=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)=0$,得到 $x=\dfrac{1}{n}$,即

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=S_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}d(S_n,S)=0$ 当且仅当 $\alpha<1$ 时成立,所以当 $\alpha<1$ 时,$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

$$(2)\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=n^{\alpha-2}-n^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-n},$$

所以当且仅当 $\alpha<2$ 时,成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x.$$

$$(3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx),\text{由于}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)=\begin{cases}0, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

所以当且仅当 $\alpha<0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立.

6. 设 $S'(x)$ 在区间 (a,b) 上连续,

$$S_n(x)=n\left[S\left(x+\frac{1}{n}\right)-S(x)\right],$$

证明:$\{S_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 $S'(x)$.

证　显然 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S'(x)$,所以只需证明 $\forall\eta>0$,$\{S_n(x)\}$ 在 $[a+\eta,b-\eta]$ 上一致收敛于 $S'(x)$.

取 $0<\alpha<\eta$,则 $S'(x)$ 在 $[a+\alpha,b-\alpha]$ 上一致连续,即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$\forall x',x''\in$

$[a+\alpha,b-\alpha]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就成立

$$|S'(x')-S'(x'')|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\left\{\left[\frac{1}{\delta}\right],\left[\frac{1}{\eta-\alpha}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 且 $x\in[a+\eta,b-\eta]$ 时，有

$$x+\frac{1}{n}\in[a+\alpha,b-\alpha],$$

由 Lagrange 中值定理，$S_n(x)=S'(\xi)$，$\xi\in\left(x,x+\frac{1}{n}\right)$，于是

$$|S_n(x)-S'(x)|=|S'(\xi)-S'(x)|<\varepsilon,$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 $S'(x)$.

7. 设 $S_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，令

$$S_n(x)=\int_0^x S_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

证明：$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

证 设 $|S_0(x)|\leqslant M$，则

$$|S_1(x)|=\left|\int_0^x S_0(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant Mx,$$

$$|S_2(x)|=\left|\int_0^x S_1(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x Mt\mathrm{d}t=M\frac{x^2}{2!},$$

$$\cdots$$

$$|S_n(x)|=\left|\int_0^x S_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t=M\frac{x^n}{n!},$$

$$\cdots$$

由于

$$M\frac{x^n}{n!}\leqslant M\frac{a^n}{n!},\lim_{n\to\infty}\left(M\frac{a^n}{n!}\right)=0,$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

8. 设 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $S(1)=0$. 证明：$\{x^nS(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以有界，设 $|S(x)|\leqslant M$. 由 $S(1)=0$，可知

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in[1-\delta,1],\text{成立}|x^nS(x)|<\varepsilon.$$

由于 $\{x^n\}$ 在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛于零，可知

$$\exists N,\forall n>N,\forall x\in[0,1-\delta],\text{成立}|x^n|<\frac{\varepsilon}{M},$$

于是

$$|x^nS(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立，因此 $\{x^nS(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

§2　一致收敛级数的判别与性质

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，　$x\in[0,1]$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$，　$x\in[0,1]$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^3e^{-nx^2}$，　$x\in[0,+\infty)$；

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$，　(i) $x\in[0,+\infty)$，　(ii) $x\in[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^3x^2}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$，$x\in[0,1]$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$，　(i) $x\in(0,+\infty)$，　(ii) $x\in[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

解　(1) $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)x^k=1-x^{n+1}$，由于$\{x^{n+1}\}$在$[0,1]$上非一致收敛，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$上非一致收敛.

(2) 设$u_n(x)=(1-x)^2x^n$，则在$[0,1]$上

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant u_n\left(\frac{n}{n+2}\right)<\frac{4}{(n+2)^2},$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{(n+2)^2}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$在$[0,1]$上一致收敛.

(3) 设$u_n(x)=x^3e^{-nx^2}$，则当$n\geqslant1$时，在$[0,+\infty)$上

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant u_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n}}\right)=\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $K=\frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}x^3e^{-nx^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) (i) 设 $u_n(x)=xe^{-nx^2}$，对任意的正整数 N，取 $m=2n(n>N)$ 与 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in[0,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=x_ne^{-(n+1)x_n^2}+x_ne^{-(n+2)x_n^2}+\cdots+x_ne^{-2nx_n^2}>nx_ne^{-2nx_n^2}$$
$$=\sqrt{n}e^{-2}\to+\infty\ (n\to\infty),$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$ 不满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理的条件，由此可知 $\sum_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致收敛；

(ii) 设 $u_n(x)=xe^{-nx^2}$，则当 $n>\frac{1}{2\delta^2}$ 时，$u_n(x)$ 关于 x 在 $[\delta,+\infty)$ 上单调减少，所以

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant\delta e^{-\delta^2n},$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\delta e^{-\delta^2n}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 设 $u_n(x)=\frac{x}{1+n^3x^2}$，则当 $n\geqslant1$ 时，$|u_n(x)|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(6) 设 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，则当 $n\geqslant1$ 时，$|u_n(x)|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(7) 设 $a_n(x)=(1-x)x^n$，$b_n(x)=(-1)^n$，则 $\{a_n(x)\}$ 对固定的 $x\in[0,1]$ 关于 n 是单调的，且在 $[0,1]$ 上一致收敛于零，同时 $\left|\sum_{k=0}^{n}b_k(x)\right|\leqslant1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(8) 设 $a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则 $\{a_n(x)\}$ 对固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 关于 n 是单调的，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零，同时 $\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(9) (i) 设 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^nx}$，取 $x_n=\frac{2}{3^n\pi}\in(0,+\infty)$，则

$$u_n(x_n)=2^n\to+\infty,$$

即$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛于0，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛；

(ii) 设$u_n(x)=2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$，则当$x\in[\delta,+\infty)$时，

$$|u_n(x_n)|\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛.

(10) 设$a_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n(x)=\sin x\sin nx$，由于$a_n(x)$与$x$无关且单调趋于零，所以$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\cos\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right|=\left|\cos\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant2,$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(11) 设$u_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{e^2}>0$，对任意的正整数$N$，取$m=2n(n>N)$与$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in(-\infty,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+1}}+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+2}}+\cdots+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{nx_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{1}{e^2}=\varepsilon_0,$$

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$不满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理的条件，由此可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛.

(12) 设$a_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的$x\in(-\infty,+\infty)$关于$n$是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

2. 证明：函数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续，且有连续的导函数.

证　由于$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2+1}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上一致收敛，所以$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续.

设 $\sigma(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{n^2+1}\right)'=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{n^2+1}$，由于$\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$单调趋于零，且对任意的 $0<\delta<\pi$，当 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由 Dirichlet 判别法，可知 $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{n^2+1}$在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛，即 $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续．再由逐项求导定理，可知$f'(x)=\sigma(x)$在$(0,2\pi)$上成立，即$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上有连续的导函数.

3. 证明：函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上连续，且有各阶连续导数.

证 对任意的 $0<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$时，成立 $0<ne^{-nx}\leqslant ne^{-an}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-an}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$[a,A]$上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上连续.

设 $\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})'=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$，与上面类似可证明 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$在$(0,+\infty)$上连续．再由逐项求导定理，可知$f'(x)=\sigma(x)$在$(0,+\infty)$上成立，即$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上有连续的导函数.

注意到$(-1)^k\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nx}(k=1,2,\cdots)$在$(0,+\infty)$上都是内闭一致收敛的，所以上述过程可以逐次进行下去，由数学归纳法，可知$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上有各阶连续导函数.

4. 证明：函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上连续，且有各阶连续导数；函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ 在$(0,+\infty)$上连续，且有各阶连续导数.

证 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$，对任意$1<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$时，成立 $0<\dfrac{1}{n^x}\leqslant\dfrac{1}{n^a}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上连续.

又$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{n^x}\right)=-\frac{\ln n}{n^x}$，且对任意$1<a<A<+\infty$，$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，则$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上连续．由逐项求导定理，可知$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$，即$f(x)$在$(1,+\infty)$上有连续导函数.

利用$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{n^x}\right)=(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}(k=1,2,\cdots)$，可以证明$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛，同理可得$f(x)$在$(1,+\infty)$上有各阶连续导函数.

设$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$，由 Dirichlet 判别法，可知对任意$0<a<A<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上连续.

又$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$，同样由 Dirichlet 判别法，可知对任意$0<a<A<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$[a,A]$上一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上连续．由逐项求导定理，可知$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}$，即$g(x)$在$(0,+\infty)$上有连续导函数.

利用$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^{n+k}\ln^k n}{n^x}(k=1,2,\cdots)$，同样由 Dirichlet 判别法，可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}\ln^k n}{n^x}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，同理可得$g(x)$在$(0,+\infty)$上有各阶连续导函数.

5. 证明：函数项级数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right).$$

证　函数项级数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$收敛，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}},$$

由于$\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}\leqslant\frac{1}{n^2}$，由 Weierstrass 判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)$在$(-\infty,+\infty)$上一致

收敛,再由逐项求导定理,即可知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right).$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$;　　(2) $\int_0^1\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$.

证　(1) 首先对于每一固定的 $x\in[0,\delta)(\delta>0)$,$\frac{1}{n^x}$ 关于 n 单调,且对于一切 $x\in[0,\delta)$ 与一切 n,成立 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$,又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是数项级数,它的收敛意味着关于 x 的一致收敛性,于是由 Abel 判别法,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,\delta)$ 上一致收敛,因此和函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 关于 x 在 $[0,\delta)$ 连续,从而成立

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

(2) 由例题 10.2.4,$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛,再由逐项积分定理,得到

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}.$$

7. 设 $u_n(x),v_n(x)$ 在区间 (a,b) 上连续,且 $|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^+$ 成立. 证明:若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 (a,b) 上点态收敛于一个连续函数,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也必然收敛于一个连续函数.

证　设任意闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$. 由于 $v_n(x)\geqslant 0$ 在 $[c,d]$ 上连续,和函数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续,则由 Dini 定理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 于是由 Cauchy 收敛原理,可知 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\forall x\in[c,d]$,成立

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)|\leqslant v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots+v_m(x)<\varepsilon,$$

此即说明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛,因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 由于 $[c,d]\subset(a,b)$ 的任意性,即得到 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 上连续.

8. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 收敛,且对一切 $n\in\mathbf{N}^+$,$u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 收敛,由 Cauchy 收敛原理,可知

$$\forall \varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\text{成立}\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|<\varepsilon \text{ 与 }\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(b)\right|<\varepsilon.$$

再由 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调增加性，可知对一切 $x\in[a,b]$，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|\leqslant\max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|,\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(b)\right|\right\}<\varepsilon,$$

此即说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

9. 设对一切 $n\in\mathbf{N}^+$，$u_n(x)$ 在 $x=a$ 右连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 发散，证明：对任意 $\delta>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上必定非一致收敛.

证　采用反证法. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上一致收敛，则

$$\forall \varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\forall x\in(a,a+\delta),\text{成立}\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再令 $x\to a+$，得到 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 收敛，与条件矛盾，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上必定非一致收敛.

10. 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在 $[-a,a]$ 上是一致收敛的，其中 a 是小于 $2\ln^2 2$ 的任意固定正数.

证　$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在 $[-a,a]$ 上单调增加，所以

$$\ln\left(1-\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{a}{n\ln^2 n}\right),$$

$$\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\sim\pm\frac{a}{n\ln^2 n}(n\to\infty).$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)$ 收敛，再由习题 8 可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛.

11. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

(1) 证明：$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续；

(2) 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 对一切 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，有

$$0\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛，从而 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续.

(2) 由(1)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛，由逐项积分定理，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2^n}\mathrm{d}\frac{x}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\ln\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}},$$

再利用例题 9.5.3 的结果 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$，得到

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)=\ln\frac{3}{2}.$$

12. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$.

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证 (1) 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，由逐项积分定理，

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nt}{\sqrt{n^3+n}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}},$$

于是

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+n}}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{(2n-1)^3+(2n-1)}},$$

这是一个 Leibniz 级数，它的前两项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $-\frac{1}{3\sqrt{30}}$，所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且一致连续；

(2) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证　(1) 由 $\frac{1}{2^n+x}\leqslant\frac{1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上点态收敛；又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)=\frac{-1}{(2^n+x)^2}$，且对一切 $x\in[0,+\infty)$，$\left|\frac{-1}{(2^n+x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{2^{2n}}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．由逐项求导定理，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导.

由于

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|\leqslant|x_1-x_2|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n},$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

$$(2)\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=\int_0^A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}\right)\mathrm{d}x>\sum_{k=0}^{n}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{2^k+x}=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right),$$

由于 $\lim\limits_{A\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right)=+\infty$，可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=+\infty$，所以反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

§3 幂 级 数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$；

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

解 （1）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3$，所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{3}$.

当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$，级数发散.

当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[(-1)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$，级数收敛.

所以收敛域为 $D=\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

（2）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为 $R=1$.

当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$，级数发散.

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$，通项不趋于零，级数也发散.

所以收敛域为 $D=(0,2)$.

（3）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以收敛半径为 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，级数收敛.

所以收敛域为 $D=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

（4）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为 $R=1$.

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ 是 Leibniz 级数，所以收敛.

当 $x=-2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$，级数发散.

所以收敛域为 $D=(-2,0]$.

（5）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\dfrac{n!\cdot 2^n}{3^n}\right]=0$，所以收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

（6）设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\dfrac{\ln^2 n}{n^n}}=1$，所以收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，显然 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，所以收敛域为 $D=[-1,1]$.

(7) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]=\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以收敛半径为 $R=\mathrm{e}$.

当 $x=\pm\mathrm{e}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm\mathrm{e})^n$，应用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}(n\to\infty),$$

可知级数的通项 $\frac{n!}{n^n}(\pm\mathrm{e})^n$ 不趋于零，因而发散.

所以收敛域为 $D=(-\mathrm{e},\mathrm{e})$.

(8) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]=\frac{1}{4}$，所以收敛半径为 $R=4$.

当 $x=\pm 4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，应用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}(n\to\infty),$$

可知级数的通项 $\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$ 不趋于零，因而发散.

所以收敛域为 $D=(-4,4)$.

(9) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right]=1$，所以收敛半径为 $R=1$.

当 $x=-1$ 时，应用不等式 $2k+1>\sqrt{(2k)(2k+2)}$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 是 Leibniz 级数，所以收敛.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，令 $b_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{2}$，由 Raabe 判别法可知级数发散.

所以收敛域为 $D=[-1,1)$.

2. 设 $a>b>0$，求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$；

(3) $ax+bx^2+a^2x^3+b^2x^4+\cdots+a^nx^{2n-1}+b^nx^{2n}+\cdots$.

解　(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right|}=a$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{a}$.

当 $x=-\frac{1}{a}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{b^n(-1)^n}{n^2a^n}\right)$，级数收敛.

当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{b^n}{n^2a^n}\right)$，级数发散.

所以收敛域为 $D=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}}=\frac{1}{a}$，所以收敛半径为 $R=a$.

当 $x=\pm a$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛域为 $D=(-a,a)$.

(3) 设 $ax+bx^2+a^2x^3+b^2x^4+\cdots+a^nx^{2n-1}+b^nx^{2n}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a^n}=\sqrt{a}$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛域为 $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$.

解　(1) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 R.

当 $|x|<\sqrt{R_1}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 收敛，当 $|x|>\sqrt{R_1}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散，所以 $R=\sqrt{R_1}$.

(2) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R.

当 $|x|<\min(R_1,R_2)$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 收敛.

当 $|x|>\min(R_1,R_2)$，$R_1\neq R_2$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 发散.

但当 $R_1=R_2$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径有可能增加，例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛半径为 1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)x^n$ 的收敛半径也为 1，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 2.

所以 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$.

(3) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$ 的收敛半径为 R.

由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}$，可知 $R\geqslant R_1R_2$.

上式等号可能不成立，例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ 的收敛半径为 1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ 的收敛半径也为 1，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径为 $R = +\infty$.

4. 应用逐项求导或逐项求积分等性质，求下列幂级数的和函数，并指出它们的定义域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$；　　(6) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$.

解　(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x = \pm 1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$，$f(x) = \frac{S(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

所以

$$S(x) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x = \pm 1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$，$f(x) = xS(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，利用逐项求导，得到

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$S(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x = \pm 1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$，$f(x) = \frac{S(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题(1)，得到

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n = \frac{x}{(1+x)^2},$$

所以

$$S(x)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

(4) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数收敛，所以定义域为 $D=[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，$f(x)=xS(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，利用逐项求导，得到

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

于是 $f'(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$，所以

$$S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x),x\in[-1,1),$$

而 $S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. 注意 $S(1)$ 也可利用 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性，由极限 $S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=1$ 得到.

(5) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，$f(x)=\frac{S(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题(1)，得到

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-1,$$

所以

$$S(x)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

(6) 级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，所以定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，由 $S(x)+S'(x)=\mathrm{e}^x$ 与 $S(x)-S'(x)=\mathrm{e}^{-x}$，即可得到

$$S(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}).$$

(7) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，所以定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x(\mathrm{e}^x-1)$，所以

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(\mathrm{e}^x-1)]=(1+x)\mathrm{e}^x-1.$$

注　本题也可直接利用例题 10.3.6，得到

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=(1+x)\mathrm{e}^x-1.$$

5. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则不论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=r$ 是否收敛，只要 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=r$ 收敛，就成立

$$\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

并由此证明：

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

证　由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=r$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径至少为 r，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径也至少为 r. 当 $x\in[0,r)$ 时，利用逐项积分，得到

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,r]$ 上连续，令 $x\to r-$，得到

$$\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

对 $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$ 利用上述结果，就得到

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

6. 证明：

(1) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

(2) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

证　(1) 连续 4 次逐项求导，得到

$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y.$$

(2) 应用逐项求导，可得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!\,n!},y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!\,n!},$$

于是

$$xy''+y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!\,n!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y.$$

7. 应用幂级数性质求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+2)}{4^{n+1}}$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n(2n+1)}$; (6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n(n^2-1)}$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{n+1}}{n!}$.

解 (1) 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$,令$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$,利用逐项求积分可得

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)^2},$$

于是$f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{9}.$$

(2) 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$,利用逐项求导可得

$$f(x)=\ln\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2.$$

(3) 首先由逐项求积分可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}$,再利用逐项求积分,得到

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\frac{x^3}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x)=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{27}.$$

(4) 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$,利用逐项求积分可得

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=12.$$

(5) 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$，令$g(x)=xf(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，利用逐项求导可得

$$g(x)=\arctan x,$$

于是

$$f(x)=\frac{\arctan x}{x},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

(6) 首先由逐项求导可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x)$. 设$f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n$，令$g(x)=xf(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^{n+1}$，则

$$g'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1}=x\ln(1+x),$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2},$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

(7) 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$，令$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=\mathrm{e}^{-x},$$

因此$f(x)=xg(x)=x\mathrm{e}^{-x}$. 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}=f(2)=\frac{2}{\mathrm{e}^2}.$$

8. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$，求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径.

解　设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R_1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nx^n$的收敛半径为$R_2$. 由$0\leqslant a_n\leqslant A_n$，可知$R_1\geqslant R_2$；又由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，可知$R_1\leqslant 1$.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1,$$

可知 $R_2=1$. 结合上述关系,得到 $R_1=1$.

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$.

(1) 证明:$f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上可导;

(2) $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的左导数是否存在?

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$,且在 $x=\pm\frac{1}{2}$ 处级数收敛,由 Abel 第二定理,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛,所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续.

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2^n}{n^2}x^n\right)=\frac{2^n}{n}x^{n-1}$,且对任意 $\delta>0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\delta\right]$ 上一致收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上内闭一致收敛,由函数项级数的逐项求导定理,$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上可导,且 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$.

(2) $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的左导数不存在.

令 $t=2x$,则 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$. 令 $g(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$. 利用逐项求导定理,可以得到

$$g(t)=\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u,$$

其中 $t\in[-1,1]$. 应用 L'Hospital 法则,得到

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to1-}\frac{2}{t-1}\left[\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u-\int_0^1-\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u\right]$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{2}{t-1}\int_1^t-\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u=\lim_{t\to1-}-\frac{2\ln(1-t)}{t}=+\infty.$$

§4 函数的幂级数展开

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开,并确定它们的收敛范围:

(1) $1+2x-3x^2+5x^3$,$x_0=1$;　　(2) $\frac{1}{x^2}$,$x_0=-1$;

(3) $\dfrac{x}{2-x-x^2}, x_0=0$;　　(4) $\sin x, x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

(5) $\ln x, x_0=2$;　　(6) $\sqrt[3]{4-x^2}, x_0=0$;

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}, x_0=1$;　　(8) $(1+x)\ln(1-x), x_0=0$;

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, x_0=0$;　　(10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}, x_0=0$.

解　(1) 令 $x-1=t$,则

$$1+2x-3x^2+5x^3=1+2(t+1)-3(t+1)^2+5(t+1)^3$$
$$=5+11t+12t^2+5t^3=5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3.$$

因为级数只有有限项,所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $\dfrac{-1}{x}=\dfrac{1}{1-(x+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$,应用逐项求导得到

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n.$$

级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=-2$ 与 $x=0$ 时,级数发散,所以收敛范围是 $D=(-2,0)$.

(3) $\dfrac{x}{2-x-x^2}=\dfrac{x}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{2+x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]x^n.$$

级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,级数发散,所以收敛范围是 $D=(-1,1)$.

(4) $\sin x=\sin\left[\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}.$$

级数的收敛半径为 $R=+\infty$,所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$.

(5) $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$. 级数的收敛半径为 $R=2$.

当 $x=4$ 时,级数为 $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$,收敛;当 $x=0$ 时,级数为 $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$,发散. 所以收敛范围是 $D=(0,4]$.

(6) $\sqrt[3]{4-x^2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt[3]{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^{2n}$.

级数的收敛半径为 $R=2$.

当 $x=\pm2$ 时,级数为 $\sqrt[3]{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$,令 $u_n=(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3(n+1)}{3n-1}-1\right)=\frac{4}{3}>1,$$

由 Raabe 判别法,级数收敛. 所以收敛范围是 $D=[-2,2]$.

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\dfrac{x-1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n$. 级数的收敛半径为 $R=2$.

当 $x=3$ 与 $x=-1$ 时,级数发散,所以收敛范围是 $D=(-1,3)$.

(8) $(1+x)\ln(1-x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}x^n\right)=-x-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}\right)x^n$.

级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=1$ 时,级数发散;当 $x=-1$ 时,级数收敛. 所以收敛范围是 $D=[-1,1)$.

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{1}{n}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,级数发散,所以收敛范围是 $D=(-1,1)$.

(10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\right)x^n$.

设级数的 x^n 项的系数为 a_n,则

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}<a_n<\frac{1}{2!}\ (n\geqslant 4),$$

所以级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,级数的通项不趋于零,级数发散. 所以收敛范围是 $D=(-1,1)$.

2. 求下列函数在 $x_0=0$ 的 Taylor 展开:

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$ 至 x^4;　　(2) $e^{\sin x}$ 至 x^4;

(3) $\ln\cos x$ 至 x^6;　　(4) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 至 x^4.

解 (1) $\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{x}{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots}=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)}$

$$=1+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\cdots.$$

(2) $e^{\sin x}=1+\sin x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x+\dfrac{1}{6}\sin^3 x+\dfrac{1}{24}\sin^4 x+\cdots$

$$=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^3+$$

$$\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^4+\cdots=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots.$$

(3) $\ln\cos x=\ln[1-(1-\cos x)]=-(1-\cos x)-\frac{1}{2}(1-\cos x)^2-$

$$\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\cdots=-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6-\cdots\right)-$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^3-\cdots$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-\cdots.$$

(4) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt{1+2(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)}=1+(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)-$

$$\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+\cdots)^2+\frac{1}{2}(x+x^2+\cdots)^3-\frac{5}{8}(x+\cdots)^4+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots.$$

3. 利用幂级数展开，计算下列积分，要求精确到 0.001：

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1\cos x^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

解　(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\ (2n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n+1)!\ (2n+1)}$，由于 $u_3\approx0.000\ 03$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\ (2n+1)}\approx0.946.$$

(2) $\int_0^1\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\ (4n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n)!\ (4n+1)}$，由于 $u_3\approx0.000\ 1$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^1\cos x^2\mathrm{d}x\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n)!\ (4n+1)}\approx0.905.$$

$$(3)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}},$$

这是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值,设 $u_n=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$,由于 $u_3\approx0.000\ 16$,因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字,所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\approx0.487.$$

$$(4)\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\int_2^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_2^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}},$$

这是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值,设 $u_n=\frac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$,由于 $u_4\approx0.000\ 04$,因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字,所以

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}\approx\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}}\approx0.119.$$

4. 应用$\frac{e^x-1}{x}$在 $x=0$ 的幂级数展开,证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1.$$

证 $$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!},$$

应用逐项求导,得到

$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

以 $x=1$ 代入,即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1.$$

5. 求下列函数项级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

解 (1) 令 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^{n+1}$,应用逐项求导,得到

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t},$$

于是

$$f'(t)=\ln(1+t),f(t)=\int_0^t\ln(1+t)\,dt=(1+t)\ln(1+t)-t,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^n=\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln(1+t)-1,t\in(-1,1].$$

以 $t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$ 代入，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1,x\in(-\infty,0].$$

（2）由级数乘法的 Cauchy 乘积，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x},$$

其中 $x\in(-1,1)$.

6. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$b>1$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}$ 的和.

解　设 $a_n=c+(n-1)d,n=1,2,\cdots$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}.$$

首先我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{b}}=\frac{1}{b-1}$. 设 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}x^{n-2}$，则

$$\int_0^x f(x)\,dx=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{b^n}=\frac{x}{b^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{b}}=\frac{x}{b(b-x)},$$

于是 $f(x)=\frac{1}{(b-x)^2}$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=f(1)=\frac{1}{(b-1)^2}.$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{c(b-1)+d}{(b-1)^2}.$$

7. 利用幂级数展开，计算 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$.

解

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x\right)dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

利用例题 10.4.6 中得到的结果 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，在等式两边乘以 $\frac{1}{4}$，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$，

两式相减,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

于是得到

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{8}.$$

8. (1) 应用$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$,计算 π 的值,要求精确到 10^{-4};

(2) 应用$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$,计算 π 的值,要求精确到 10^{-4}.

解 (1) $$\pi=4\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right].$$

这是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值,设

$$u_n=\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right),$$

由于 $u_7\approx0.000\ 038$,因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字,所以

$$\pi\approx\sum_{n=1}^{7}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]\approx3.141\ 6.$$

(2) $$\pi=6\arcsin\frac{1}{2}=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

设 $u_n=\frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$,由于 $\sum_{n=8}^{\infty}u_n<\frac{6(15!!)}{17(16!!)}\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\approx0.000\ 010\ 6$,因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字,所以

$$\pi=6\arcsin\frac{1}{2}\approx3+\sum_{n=1}^{7}\frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\approx3.141\ 6.$$

9. 利用幂级数展开,计算 $\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 的值,要求精确到 10^{-4}.

解 $$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_1^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\ x^n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^3\frac{(-1)^n}{n!\ x^n}\mathrm{d}x$$

$$=2-\ln 3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\ (n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

这是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值,设 $u_n=\frac{1}{n!\ (n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$,由于 $u_7<0.000\ 033$,因此前面 8 项之和的小数部分具有四位有效数字,所以

$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\approx2-\ln 3+\sum_{n=2}^{7}\frac{(-1)^n}{n!\ (n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\approx1.172\ 2.$$

§5　用多项式逼近连续函数

1. 求 $f(x)=x^3$ 的 Bernstein 多项式 $B_n(f,x)$.

解　$B_n(f,x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

利用等式 $\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=C_{n-1}^{k-1}$，可分别得到

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}C_{n-3}^{k-3}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3\sum_{k=3}^{n}C_{n-3}^{k-3}x^{k-3}(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3;$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{3(n-1)}{n^2}C_{n-2}^{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n^2}x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\frac{1}{n^2}x.$$

所以

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3+\frac{3(n-1)}{n^2}x^2+\frac{1}{n^2}x.$$

2. 设 $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,1]$，求它的四次 Bernstein 多项式 $B_4(f,x)$.

解　$B_4(f,x)=\sum\limits_{k=1}^{4}\sqrt{\frac{k}{4}}C_4^k x^k(1-x)^{4-k}$

$$=2x(1-x)^3+3\sqrt{2}x^2(1-x)^2+2\sqrt{3}x^3(1-x)+x^4$$

$$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1)x^4+2(3+\sqrt{3}-3\sqrt{2})x^3+$$

$$3(\sqrt{2}-2)x^2+2x.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在有理系数多项式 $P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立.

证　由定理 10.5.1，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $Q(x)$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|Q(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$,其中 $b_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是实数,由于有理数集合在实数集中是稠密的,可以取有理数 $a_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 分别与 $b_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 充分接近,令 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$,使得对一切$x\in[a,b]$成立

$$|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|P(x)-f(x)|\leqslant|P(x)-Q(x)|+|Q(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$成立.

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且对任一多项式 $g(x)$成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明:在$[a,b]$上成立$f(x)\equiv0$.

证 由定理 10.5.1,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在多项式 $P(x)$,使得对一切$x\in[a,b]$成立

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)-P(x)]^2\mathrm{d}x&=\int_a^b[f^2(x)-2f(x)P(x)+P^2(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-P(x)]^2\mathrm{d}x<(b-a)\varepsilon^2.$$

由 ε 的任意性,得到

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0,$$

再由$f(x)$的连续性,得到

$$f(x)\equiv0.$$

5. 设 $P_0(x)=0,P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{x^2-P_n^2(x)}{2}(n=0,1,2,\cdots)$,证明:$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上一致收敛于$|x|$.

证 首先有 $0\leqslant P_0(x)\leqslant|x|$. 设 $0\leqslant P_k(x)\leqslant|x|$,由于函数 $h(t)=t+\frac{x^2-t^2}{2}$在$t\in[0,1]$上是单调增加的,所以有

$$0\leqslant P_{k+1}(x)=P_k(x)+\frac{x^2-P_k^2(x)}{2}\leqslant|x|,$$

由数学归纳法得到对一切自然数 n 成立

$$0\leqslant P_n(x)\leqslant|x|.$$

于是由 $P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}$，又得到 $P_{n+1}(x)\geqslant P_n(x)$，所以函数序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=P(x)$，对等式 $P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}$ 两边求极限，得到 $P(x)=P(x)+\dfrac{x^2-P^2(x)}{2}$，于是解得 $P(x)=|x|$，并由 Dini 定理可知 $\{P_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上是一致收敛于 $|x|$ 的.

第十一章
Euclid 空间上的极限和连续

§1 Euclid 空间上的基本定理

1. 证明定理 11.1.1:距离满足正定性、对称性和三角不等式.

证 (a) 显然有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geqslant 0$,而且

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0\Leftrightarrow x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}.$$

(b) 由距离定义直接可得

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|.$$

(c) 由于

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-tb_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 0,$$

所以关于上述二次三项式的判别式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\\=&\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\\\leqslant&\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\\=&\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2,\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

令 $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$，则有

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|.$$

2. 证明：若 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛，则其极限是唯一的.

证　假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都是点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限，则 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\exists N_1, \forall k > N_1: |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| < \varepsilon,$$

$$\exists N_2, \forall k > N_2: |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}| < \varepsilon.$$

于是当 $k > \max\{N_1, N_2\}$ 时，成立

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}| < 2\varepsilon,$$

由于 ε 是任意正数，所以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，即极限是唯一的.

3. 设 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 收敛，证明：对于任何实数 α, β，成立等式

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) = \alpha \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k.$$

证　设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}, \lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}$，则 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\exists N_1, \forall k > N_1: |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| < \varepsilon,$$

$$\exists N_2, \forall k > N_2: |\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}| < \varepsilon,$$

于是当 $k > \max\{N_1, N_2\}$ 时，成立

$$|(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) - (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})| \leqslant |\alpha\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| + |\beta\|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) = \alpha \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k.$$

4. 求下列 $\mathbf{R}^2$ 中子集的内部、边界与闭包：

(1) $S = \{(x,y) \mid x > 0, y \neq 0\}$；

(2) $S = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$；

(3) $S = \left\{(x,y) \mid 0 < x \leqslant 1, y = \sin\dfrac{1}{x}\right\}$.

解　(1) $S^o = \{(x,y) \mid x > 0, y \neq 0\}$；$\partial S = \{(x,y) \mid x = 0 \text{ 或 } x > 0, y = 0\}$；

$\overline{S} = \{(x,y) \mid x \geqslant 0\}$.

(2) $S^o = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$；

$\partial S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 = 1\}$；

$\overline{S} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

(3) $S^o = \varnothing$；$\partial S = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 < x \leqslant 1, y = \sin\dfrac{1}{x} \text{或 } x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\right\}$；

$\overline{S} = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 < x \leqslant 1, y = \sin\dfrac{1}{x} \text{或 } x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\right\}$.

5. 求下列点集的全部聚点：

(1) $S = \left\{(-1)^k \dfrac{k}{k+1} \;\middle|\; k = 1, 2, \cdots\right\}$；

(2) $S = \left\{\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5}, \sin\dfrac{2k\pi}{5}\right) \;\middle|\; k = 1, 2, \cdots\right\}$；

(3) $S=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)(y^2-x^2+1)\leqslant 0\}$.

解 (1) $S'=\{\pm 1\}$.

(2) $S'=\varnothing$.

(3) $S'=\{(x,y)\mid y^2-x^2+1\leqslant 0\}$.

6. 证明定理 11.1.3:$\boldsymbol{x}$ 是点集 $S(\subset\mathbf{R}^n)$ 的聚点的充分必要条件是:存在 S 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$,满足 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}(k=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$.

证 必要性:假设 $\boldsymbol{x}$ 是点集 S 的聚点,对于 $\delta=\dfrac{1}{k}$,在 $\boldsymbol{x}$ 的 $\delta=\dfrac{1}{k}$ 邻域中任取一点 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}$,则有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$.

充分性:用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}$ 不是点集 S 的聚点,则在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)(\delta>0)$ 中,最多只有 S 的有限个点,所以 $S\cap O(\boldsymbol{x},\delta)-\{\boldsymbol{x}\}$ 为有限集,于是 $d=\inf\{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\mid \boldsymbol{y}\in S,\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}\}>0$,故不存在 S 中满足 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 以 $\boldsymbol{x}$ 为极限,产生矛盾.

7. 设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 上的开集,是否 U 的每个点都是它的聚点?对于 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集又如何呢?

解 开集 U 中的每个点 $\boldsymbol{x}$ 一定是它的内点,所以 $\boldsymbol{x}$ 的任意邻域都有 U 中的无限个点,所以 $\boldsymbol{x}$ 一定是 U 的聚点.

由于 $S=\{(0,0)\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的闭集,而 S 只有一个点,所以无聚点,即闭集中的点不一定是它的聚点.

8. 证明 $S\subset\mathbf{R}^n$ 的所有内点组成的点集 S° 必是开集.

证 假设 $\boldsymbol{x}\in S^\circ$,则 $\exists\delta>0$,$O(\boldsymbol{x},\delta)\subset S$. 而 $\forall\boldsymbol{y}\in O(\boldsymbol{x},\delta)$,由于 $O(\boldsymbol{y},\delta-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)\subset O(\boldsymbol{x},\delta)$,所以 $\boldsymbol{y}$ 也是 S 的内点,从而 $O(\boldsymbol{x},\delta)\subset S^\circ$,于是 S° 必是开集. 如果 S° 是空集 $\varnothing$,则 $\varnothing$ 也是开集.

9. 证明 $S\subset\mathbf{R}^n$ 的闭包 $\bar{S}=S\cup S'$ 必是闭集.

证 假设 $\boldsymbol{x}\in\bar{S}^c$,则 $\boldsymbol{x}\notin S$,且 $\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点,于是在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$ 中至多只有 S 的有限项,故存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta_1)$ 不含 S 的点,即 $O(\boldsymbol{x},\delta_1)\subset\bar{S}^c$,从而 $\bar{S}^c$ 为开集,所以 $\bar{S}$ 必是闭集.

10. 设 $E,F\subset\mathbf{R}^n$. 若 E 为开集,F 为闭集,证明:$E\backslash F$ 为开集,$F\backslash E$ 为闭集.

证 由于 F 为闭集,所以 F^c 为开集,而 $E\backslash F=E\cap F^c$ 也是开集. 由于 E 为开集,所以 E^c 为闭集,从而 $F\backslash E=F\cap E^c$ 也是闭集.

11. 证明 Cantor 闭区域套定理.

证 假设 $\{S_k\}$ 是非空闭集序列,满足

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_k\supset S_{k+1}\supset\cdots,$$

以及 $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}S_k=0$. 任取 $\boldsymbol{x}_k\in S_k$,则当 $m,n>k$ 时,$\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_n\in S_k$,从而成立 $|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|\leqslant\operatorname{diam}S_k$,于是 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是基本序列,从而收敛,设其极限为 $\boldsymbol{x}$. 对于任意 k,当 $m\geqslant k$ 时,$\boldsymbol{x}_m\in S_k$,所以 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限 $\boldsymbol{x}\in\bar{S}_k=S_k$,于是 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$,所以 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$ 非空.

再证惟一性. 假设 $\boldsymbol{y}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$,则 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\operatorname{diam}S_k\to 0(k\to\infty)$,所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

12. 举例说明：满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 不一定收敛.

解　设 $\boldsymbol{x}_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\in\mathbf{R}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0$，而 $|\boldsymbol{x}_k|=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\to+\infty$，所以 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 不收敛.

13. 设 $E,F\subset\mathbf{R}^n$ 为紧集，证明 $E\cap F$ 和 $E\cup F$ 为紧集.

证　因为 $E,F\subset\mathbf{R}^n$ 为紧集，所以 E,F 为有界闭集，于是可知 $E\cap F$ 和 $E\cup F$ 也都是有界闭集，即紧集.

14. 用定义证明点集 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集.

证　假定 $\{U_\alpha\}$ 为点集 $S=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$ 的任一开覆盖．设 $0\in U_{\alpha_0}$，则 $\exists\delta>0:O(0,\delta)\subset U_{\alpha_0}$，于是当 $k>\frac{1}{\delta}$ 时，$\frac{1}{k}\in U_{\alpha_0}$．对于 $\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\,k=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]\right\}$，存在 $\{U_\alpha\}$ 中 U_{α_k}，使得 $\frac{1}{k}\in U_{\alpha_k}$，$k=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]$．于是 $\left\{U_{\alpha_0},U_{\alpha_k}\,\middle|\,k=1,2,\cdots,\left[\frac{1}{\delta}\right]\right\}$ 构成 S 的有限开覆盖，所以 S 为紧集.

15. 应用 Heine－Borel 定理直接证明：$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集必有聚点.

证　假定 S 为 $\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集，则由习题 9，$\bar{S}=S\cup S'$ 必是闭集．如果 S 无聚点，即 $S'=\varnothing$，则 $\bar{S}=S$，即 S 为有界闭集，从而由 Heine－Borel 定理知 S 为 $\mathbf{R}^n$ 上的紧集.

$\forall\boldsymbol{x}\in S$，由于 $\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点，存在 $O(\boldsymbol{x},\delta_x)$ 只含有 S 中有限个点．显然 $\{O(\boldsymbol{x},\delta_x)\,|\,\boldsymbol{x}\in S\}$ 构成为 S 的一个开覆盖，但由于其中有限个 $O(\boldsymbol{x},\delta_x)$ 只能包含 S 中有限个点，因而不存在 S 的有限开覆盖，矛盾！所以 S 必有聚点.

§2　多元连续函数

1. 确定下列函数的自然定义域：

(1) $u=\ln(y-x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；　(2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$；

(3) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\,(R>r)$；

(4) $u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

解　(1) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,y>x\}$.

(2) $D=\{(x,y,z)\,|\,x>0,y>0,z>0\}$.

(3) $D=\{(x,y,z)\,|\,r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(4) $D=\{(x,y,z)\,|\,|z|\leqslant x^2+y^2,x^2+y^2\neq0\}$.

2. 设 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　$(x>0)$，求 $f(x)$.

解 因为

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. 若函数

$$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1),$$

且当 $y=4$ 时 $z=x+1$，求 $f(x)$ 和 $z(x,y)$.

解 由 $z(x,4)=\sqrt{4}+f(\sqrt{x}-1)=x+1$，可得

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1+1)^2-1,$$

所以

$$f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x,$$

$$z(x,y)=x+\sqrt{y}-1.$$

4. 讨论下列函数当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时的极限是否存在：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$；　　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\\ 0, & \text{其他点};\end{cases}$　　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^8}$.

解 (1) 由于 $f(x,kx)=\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$ 依赖于 k，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在.

(2) $f(x,kx)=\dfrac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 依赖于 k，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在.

(3) 由于 $f\left(x,\dfrac{x^2}{2}\right)=1$，所以当 (x,y) 沿曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 1，而当 (x,y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 0，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在.

(4) 利用平均值不等式

$$\frac{x^4+y^8}{3}=\frac{\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^4+y^8}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^8y^8},$$

可得

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3y^3|}{x^4+y^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\frac{|xy|^3}{|xy|^{\frac{8}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}|xy|^{\frac{1}{3}}\to 0,((x,y)\to(0,0)),$$

所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限存在且为 0.

5. 对多元函数证明极限唯一性、局部有界性、局部保序性和局部夹逼性.

证 (1) 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists \delta_1>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta_1): |f(x)-A|<\varepsilon,$$
$$\exists \delta_2>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta_2): |f(x)-B|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$|A-B|\leqslant |f(x)-A|+|f(x)-B|<2\varepsilon,$$

由于 ε 为任意正数，所以 $A=B$，即极限唯一.

(2) 假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则对于 $\varepsilon=1$，$\exists \delta>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$：$|f(x)-A|<1$，即

$$|f(x)|<|A|+1.$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 点的某个去心邻域有界.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则对于 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$，$\exists \delta_1>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta_1)$：$|f(x)-A|<\varepsilon$，即

$$f(x)>A-\varepsilon=\frac{A+B}{2}.$$

又 $\exists \delta_2>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta_2): |g(x)-B|<\varepsilon$，即

$$g(x)<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立局部保序性：

$$g(x)<\frac{A+B}{2}<f(x).$$

(4) 假定存在 $\rho>0$，使当 $0<|x-x_0|<\rho$ 时成立

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A.$

$\forall \varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，$\exists \delta_1>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta_1)$：$|h(x)-A|<\varepsilon$，所以

$$h(x)<A+\varepsilon.$$

又由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\exists \delta_2>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta_2)$：$|g(x)-A|<\varepsilon$，所以

$$g(x)>A-\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\rho,\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

6. 对多元函数证明极限的四则运算法则：假设当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$　$(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$.

证　假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\exists \delta_1>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta_1): |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$\exists \delta_2>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta_2): |g(x)-B|<\varepsilon,$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\leqslant |f(x)-A|+|g(x)-B|<2\varepsilon,$$

所以(1)成立.

由于 $g(x)$ 在 x_0 有极限，所以 $g(x)$ 在 x_0 局部有界，即存在正数 X 和 $\delta'>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta'): |g(x)|<X$. 取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$|f(x)g(x)-AB|\leqslant |f(x)g(x)-Ag(x)|+|Ag(x)-AB|<(X+|A|)\varepsilon,$$

所以(2)成立.

由于 $B\neq 0, \forall \varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{|B|}{2}\right), \exists \delta''>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta'')$：

$$|g(x)|>|B|-\varepsilon\geqslant\frac{|B|}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta'',\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{B(f(x)-A)-A(g(x)-B)}{Bg(x)}\right|$$
$$<\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\varepsilon,$$

所以(3)成立.

7. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1-xy)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(x^2+y^2)}=1.$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)=1$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=+\infty.$$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\dfrac{1}{2}.$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)=2.$

(5) $\ln(x^2+e^{y^2})=\ln(1+x^2+e^{y^2}-1)=\ln(1+x^2+y^2+o(y^2))$
$=x^2+y^2+o(x^2+y^2)$，

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}=1.$$

(6) $|\sin(x^3+y^3)|\leqslant|x^3+y^3|=|x+y||x^2+y^2-xy|\leqslant 2|x+y||x^2+y^2|$,

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0.$$

(7) 因为

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\ ((x,y)\to(0,0)),$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}\geqslant\frac{1}{|xy|},\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{|xy|}=+\infty,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}=+\infty.$$

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}[(x^2e^{-x})e^{-y}]+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}[(y^2e^{-y})e^{-x}]=0.$

8. 讨论下列函数在原点的二重极限和二次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$;

(3) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$.

解　(1) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x+kx^2}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4(1+kx)^2}{x^4(1+kx)^2+k^2x^4}=\frac{1}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在.

由$\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\dfrac{0}{y^2}=0,y\neq0$,可知$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$. 同理可知$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$. 所以二次极限存在且都等于 0.

(2) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+x^2)-k^2x^2(1+k^2x^2)}{x^2(1+k^2)}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在. 又

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=-\lim_{y\to0}(1+y^2)=-1,$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}(1+x^2)=1.$$

所以二次极限都存在但不相等.

(3) 由于 $|f(x,y)| \leqslant |x| + |y|$,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}\ (y\neq 0)$ 和 $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}\ (x\neq 0)$ 都不存在,所以两个二次极限都不存在.

9. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right), & x>0 \text{ 且} \dfrac{1}{2}x^2<y\leqslant x^2,\\ \dfrac{1}{x^2}(2x^2-y), & x>0 \text{ 且 } x^2<y<2x^2,\\ 0, & \text{其他点}\end{cases}$$

在原点不连续,而在其他点连续.

证 设 $x>0, f(x,x^2)=\dfrac{2}{x^2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=1$,所以当点 (x,y) 沿 $y=x^2\ (x>0)$ 趋于原点时函数 $f(x,y)$ 的极限为 1,而当点 (x,y) 沿 x 轴趋于原点时函数 $f(x,y)$ 的极限为 0,所以函数 $f(x,y)$ 在原点不连续.

对于函数 $f(x,y)$ 在其他点的连续性只要考虑函数在下述曲线

$$y=\frac{1}{2}x^2, y=x^2, y=2x^2 \quad (x>0)$$

上的情况(因为在除去上述曲线和原点的区域上函数显然连续).

设 $x_0>0$. 在 $(x_0,y_0)=\left(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2\right)$ 点,由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y>x^2/2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2\left(y-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=0=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\leqslant x^2/2}} f(x,y)=0=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=\left(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2\right)$ 连续. 同理可知函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,2x_0^2)$ 也连续.

在 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ 点,由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 2x^2>y>x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2x^2-y}{x^2}=\frac{2x_0^2-x_0^2}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2/2<y\leqslant x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2\left(y-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=\frac{2\left(x_0^2-\frac{1}{2}x_0^2\right)}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ 也连续.

综上所述,函数 $f(x,y)$ 除了在原点不连续,在其他点都连续.

10. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续范围.

解　显然函数 $f(x,y)$ 在区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$ 上连续，所以只要考虑函数 $f(x,y)$ 在原点的连续性. 由 $|x^2y|\leqslant\frac{1}{2}|x|(x^2+y^2)$，得到

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

即函数在原点也连续. 因此函数 $f(x,y)$ 在平面上点点连续.

11. 设 $f(t)$ 在区间 (a,b) 上具有连续导数，$D=(a,b)\times(a,b)$. 定义 D 上的函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y.\end{cases}$$

证明：对于任何 $c\in(a,b)$ 成立

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c).$$

证　由题设，利用 Lagrange 中值定理 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，其中 ξ 介于 x 和 y 之间. 所以

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x\neq y}}F(x,y)=\lim_{(x,y)\to(c,c)}f'(\xi)=f'(c),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x=y}}F(x,y)=\lim_{x\to c}f'(x)=f'(c),$$

综合上面两式可得

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c).$$

12. 设二元函数 $f(x,y)$ 在开集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的，对于变量 y 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in D$，L 为常数（通常称为 Lipschitz 常数）. 证明 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证　假设 $(x_0,y_0)\in D$，由于函数对于变量 x 是连续的，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(|x-x_0|<\delta)$，成立

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

当 $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\min(\delta,\varepsilon)$ 时

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ &\leqslant L|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ &\leqslant L\varepsilon+\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，证毕.

13. 证明：若 f 和 g 是 D 到 $\mathbf{R}^m$ 上的连续映射，则映射 $f+g$ 与函数 $\langle f,g\rangle$ 在 D 上都是连续的.

证 假设 $x_0\in D$，由 f 和 g 是连续的，$\forall\varepsilon>0$，

$$\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta),\text{成立}|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

$$\exists\delta_1>0,\forall x(|x-x_0|<\delta_1),\text{成立}|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon,$$

于是，$\forall x(|x-x_0|<\min(\delta,\delta_1))$，成立

$$\begin{aligned}&|f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))|\\ \leqslant&|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<2\varepsilon,\end{aligned}$$

所以映射 $f+g$ 在 x_0 连续. 又

$$\begin{aligned}&|\langle f(x),g(x)\rangle-\langle f(x_0),g(x_0)\rangle|\\ =&|\langle f(x)-f(x_0),g(x)\rangle+\langle f(x_0),g(x)-g(x_0)\rangle|\\ \leqslant&|g(x)|\varepsilon+|f(x_0)|\varepsilon,\end{aligned}$$

由于 g 连续，所以 g 的每个分量都连续，从而都局部有界，于是 g 也局部有界. 根据上式，$\langle f,g\rangle$ 在 x_0 连续，证毕.

14. 证明复合映射的连续性定理(定理 11.2.3).

证 假设 g 在 D 上连续，f 在 Ω 上连续，并且 $x_0\in D$，$u_0=g(x_0)\in\Omega$. 由 f 在 u_0 上连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，$\forall u(|u-u_0|<\eta)$ 成立

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$$

对于上述 $\eta>0$，由 g 在 x_0 连续知 $\exists\delta>0$，$\forall x(|x-x_0|<\delta)$ 成立

$$|g(x)-g(x_0)|<\eta.$$

于是，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f\circ g(x)-f\circ g(x_0)|=|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon,$$

所以复合函数 $f\circ g$ 在 x_0 连续.

§3 连续函数的性质

1. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射. 如果 D 中的点列 $\{x_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$，且 $a\in D$，证明

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(a).$$

证 由 f 在 a 连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(|x-a|<\delta)$，成立

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

又由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$，对于上述 $\delta>0$，存在 K，当 $k>K$ 时成立

$$|x_k-a|<\delta,$$

于是当 $k>K$ 时成立

$$|f(x_k)-f(a)|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(a).$$

2. 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，c 为实数．设

$$A_c=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)<c\},\quad B_c=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\leqslant c\}.$$

证明：A_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，B_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集.

证　对于任意 $x_0\in A_c$，由于 f 在 x_0 连续，取 $\varepsilon=c-f(x_0)>0$，则 $\exists\delta>0$，$\forall x(|x-x_0|<\delta)$，成立

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=c-f(x_0),$$

即有 $f(x)<c$，所以 $x\in A_c$．这说明 A_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集.

由 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续可知 $-f$ 也在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，于是

$$(B_c)^c=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)>c\}=\{x\in\mathbf{R}^n\mid -f(x)<-c\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，所以 B_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集.

3. 设二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},\quad (x,y)\in D=[0,1)\times[0,1),$$

证明：f 在 D 上连续，但不一致连续.

证　由于 f 在 D 上是初等函数，所以连续．但因为当 $n\to+\infty$ 时，

$$\left|\left(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n}\right)-\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right|\to 0,$$

而

$$f\left(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{4n^2}{4n-1}-\frac{n^2}{2n-1}=\frac{(4n-3)n^2}{(4n-1)(2n-1)}\to+\infty,$$

所以 f 在 D 上不一致连续.

4. 设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集，定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 为

$$f(x)=\inf\{|x-y|\mid y\in A\}.$$

它称为 x 到 A 的距离．证明：

（1）当且仅当 $x\in\bar{A}$ 时，$f(x)=0$；

（2）对于任意 $x',x''\in\mathbf{R}^n$，不等式

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|x'-x''|$$

成立，从而 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续；

（3）若 A 是紧集，则对于任意 $c>0$，点集 $\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\leqslant c\}$ 是紧集.

证　（1）假定 $x\in\bar{A}$，则存在 A 中的点列 $\{x_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$，所以 $f(x)=0$．反之，由 $f(x)=0$ 可知存在 A 中的点列 $\{x_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，所以 $x\in\bar{A}$.

（2）不妨假设 $f(x')\geqslant f(x'')$．首先对于任意的 k，存在 $x_k\in A$，满足

$$f(\boldsymbol{x}'') > |\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}_k| - \frac{1}{k},$$

再利用

$$f(\boldsymbol{x}') \leqslant |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_k|,$$

两式相减,得到

$$0 < f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'') < |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_k| - \left(|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}_k| - \frac{1}{k}\right) \leqslant |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''| + \frac{1}{k},$$

令 $k \to \infty$,即得到

$$|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| \leqslant |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|.$$

由上式即可知 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

(3) 由(2)知 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续,再由本节习题的第 2 题知点集 $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \leqslant c\}$ 是闭集. 由于 A 是紧集,所以 A 有界,即 $\exists M, \forall \boldsymbol{x} \in A$,成立 $|\boldsymbol{x}| \leqslant M$. $\forall \boldsymbol{y} \in B$,取 $\boldsymbol{x} \in A$,使得

$$f(\boldsymbol{y}) > |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| - 1.$$

于是

$$|\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}| < f(\boldsymbol{y}) + 1 + M \leqslant c + 1 + M,$$

即 B 也有界. 所以 B 为有界闭集,也就是紧集.

5. 设二元函数 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,证明:

(1) 若 $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$,则 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值必定存在;

(2) 若 $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = 0$,则 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值与最小值至少存在一个.

证 (1) 任取一点 (x_0, y_0),由 $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$,可知存在 $R > 0$,当 $x^2 + y^2 > R^2$,成立 $f(x,y) > f(x_0, y_0)$. $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ 上必定取到最小值,且此最小值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值.

(2) 如果 $f(x,y) \equiv 0$,则命题显然成立. 不然的话,任取 (x_0, y_0),使得函数值在此点非零.

若 $f(x_0, y_0) > 0$,由 $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = 0$,可知存在 $R > 0$,当 $x^2 + y^2 > R^2$ 时,成立 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$,则 $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ 上必定取到最大值,且此最大值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值.

若 $f(x_0, y_0) < 0$,由 $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = 0$,可知存在 $R > 0$,当 $x^2 + y^2 > R^2$ 时,成立 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$,则 $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ 上必定取到最小值,且此最小值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值.

6. 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,满足

(1) 当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时成立 $f(\boldsymbol{x}) > 0$;

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}$ 与 $c > 0$,成立 $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$.

证明:存在 $a > 0, b > 0$,使得

$$a|\boldsymbol{x}| \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant b|\boldsymbol{x}|.$$

证 单位球面是 $\mathbf{R}^n$ 上的紧集,设 f 在单位球面上的最小值和最大值分别为 a 和 b,则有

$$0<a\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b<+\infty,\quad \forall\,|\boldsymbol{x}|=1.$$

于是 $\forall \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\left|\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right|=1$，所以

$$f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\leqslant b|\boldsymbol{x}|,$$

同理 $f(\boldsymbol{x})\geqslant a|\boldsymbol{x}|$. 由于当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时不等式显然成立，所以 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，成立

$$a|\boldsymbol{x}|\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|.$$

7. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射，证明：对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意子集 A，成立

$$\boldsymbol{f}(\bar{A})\subset\overline{\boldsymbol{f}(A)}.$$

举例说明 $\boldsymbol{f}(\bar{A})$ 能够是 $\overline{\boldsymbol{f}(A)}$ 的真子集.

证　$\forall \boldsymbol{x}\in\bar{A}$，存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，由于映射 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 连续，

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}\left(\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k\right)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\overline{\boldsymbol{f}(A)}$，即 $\boldsymbol{f}(\bar{A})\subset\overline{\boldsymbol{f}(A)}$.

取 $n=2$，$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续. 令 $A=\mathbf{R}^2$，则 $\bar{A}=A$，但

$$\boldsymbol{f}(\bar{A})=\{x\mid x>0\},\quad \overline{\boldsymbol{f}(A)}=\{x\mid x\geqslant 0\},$$

$\boldsymbol{f}(\bar{A})$ 是 $\overline{\boldsymbol{f}(A)}$ 的真子集.

8. 设 f 是有界开区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的一致连续函数，证明：

(1) 可以将 f 连续延拓到 D 的边界上，即存在定义在 $\bar{D}$ 上的连续函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}\Big|_D=f$；

(2) f 在 D 上有界.

证　(1) 由于 f 在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta)$：

$$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon.$$

设 $\boldsymbol{\zeta}\in\partial D$，任取点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$（$\boldsymbol{x}_n\in D$，$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{\zeta}$），由于 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为 Cauchy 点列，对于上述 $\delta>0$，$\exists K$，当 $m,n>K$ 时，成立 $|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|<\delta$，于是

$$|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon,$$

所以 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 是基本数列，故一定收敛. 记该极限为 $g(\boldsymbol{\zeta})$.

在 $|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon$ 中令 $m\to\infty$，得到

$$|f(\boldsymbol{x}_n)-g(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant\varepsilon.$$

对于 $\forall \boldsymbol{x}\in D$，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|<\delta/2$，存在点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中某项 $\boldsymbol{x}_k$，满足

$$|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{\zeta}|<\delta/2,\ |f(\boldsymbol{x}_k)-g(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|+|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{\zeta}|<\delta,$$

$$|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_k)|+|f(\boldsymbol{x}_k)-g(\boldsymbol{\zeta})|<2\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{x}\in D}}f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{\zeta}),$$

由此可知 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 的极限 $g(\boldsymbol{\zeta})$ 只与 $\boldsymbol{\zeta}\in\partial D$ 有关，而与点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的选取无关. 令

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in D,\\ g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in \partial D.\end{cases}$$

显然,$\tilde{f}$ 在 D 上连续. 现只要证明 $\tilde{f}$ 在 ∂D 上连续. 设 $\boldsymbol{\zeta}\in\partial D$,由

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{\zeta})=\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}),$$

可知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}\in D(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|<\delta)$:

$$|f(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta})|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\forall\boldsymbol{\zeta}'\in\partial D(|\boldsymbol{\zeta}'-\boldsymbol{\zeta}|<\delta)$,在上式中令 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}'$,由

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}'\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}'),$$

可知

$$|\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}')-\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

于是得到

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{x}\in \overline{D}}} \tilde{f}(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}),$$

这就证明了 $\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 上连续. 换言之,$\tilde{f}$ 是定义在 $\overline{D}$ 上的连续函数,满足 $\tilde{f}\Big|_D=f$.

(2) 由于 $\overline{D}$ 为有界闭集,即紧集,$\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 上连续保证了 $\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 上有界,从而 f 在 D 上有界.

第十二章
多元函数的微分学

§1 偏导数与全微分

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^5-6x^4y^2+y^6$；　(2) $z=x^2\ln(x^2+y^2)$；

(3) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$；　(6) $z=\tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$；

(7) $z=\sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$；　(8) $z=(1+xy)^y$；

(9) $z=\ln(x+\ln y)$；　(10) $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$；

(11) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$；　(12) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(13) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；　(14) $u=x^{y^z}$；

(15) $u=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$（$a_i$为常数）；　(16) $u=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$（$a_{ij}=a_{ji}$且为常数）.

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=5x^4-24x^3y^2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=6y^5-12x^4y.$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^3}{x^2+y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}.$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}.$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)[1-2\sin(xy)],\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)[1-2\sin(xy)].$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y),\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^x(x\cos y-\sin y).$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right).$

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$.

(9) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$.

(10) 注意 $z=\arctan x+\arctan y,\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$.

(11) $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)},\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)},\frac{\partial u}{\partial z}=2xz\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

(12) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}$.

(13) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(14) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1},\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\ln y$.

(15) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=a_i,i=1,2,\cdots,n$.

(16) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,i=1,2,\cdots,n,\frac{\partial u}{\partial y_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,j=1,2,\cdots,n$.

2. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$,求 $f_x(3,4)$ 及 $f_y(3,4)$.

解 因为 $f_x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},f_y=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,所以

$$f_x(3,4)=\frac{2}{5},\quad f_y(3,4)=\frac{1}{5}.$$

3. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$,验证 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

证 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$,所以

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

4. 曲线 $\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线与 x 轴的正向所夹的角度是多少?

解 以 x 为参数,曲线在点(2,4,5)处的切向量为 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=2}=(1,0,1)$,设它与 x 轴的正向所夹的角度为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\cdot(1,0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

5. 求下列函数在指定点的全微分：

(1) $f(x,y)=3x^2y-xy^2$，在点(1,2)；

(2) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$，在点(2,4)；

(3) $f(x,y)=\frac{\sin x}{y^2}$，在点(0,1)和$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$.

解　(1) 因为 $\mathrm{d}f(x,y)=(6xy-y^2)\mathrm{d}x+(3x^2-2xy)\mathrm{d}y$，所以

$$\mathrm{d}f(1,2)=8\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$$

(2) 因为 $\mathrm{d}f(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y$，所以

$$\mathrm{d}f(2,4)=\frac{4}{21}\mathrm{d}x+\frac{8}{21}\mathrm{d}y.$$

(3) 因为 $\mathrm{d}f(x,y)=\frac{\cos x}{y^2}\mathrm{d}x-\frac{2\sin x}{y^3}\mathrm{d}y$，所以

$$\mathrm{d}f(0,1)=\mathrm{d}x,\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4},2\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{d}y.$$

6. 求下列函数的全微分：

(1) $z=y^x$；　　(2) $z=xye^{xy}$；

(3) $z=\frac{x+y}{x-y}$；　　(4) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；　　(6) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

解　(1) $\mathrm{d}z=y^x\ln y\mathrm{d}x+xy^{x-1}\mathrm{d}y$.

(2) $\mathrm{d}z=e^{xy}(1+xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$.

(3) $\mathrm{d}z=-\frac{2y}{(x-y)^2}\mathrm{d}x+\frac{2x}{(x-y)^2}\mathrm{d}y$.

(4) $\mathrm{d}z=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y$.

(5) $\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(6) $\mathrm{d}u=\frac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)}{x^2+y^2+z^2}$.

7. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数.

解　由于 $v=\frac{\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}=\frac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}v_1+\frac{\partial z}{\partial y}v_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8. 设 $z=x^2-xy+y^2$，求它在点(1,1)处的沿方向 $v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，并指出：

(1) 沿哪个方向的方向导数最大？

(2) 沿哪个方向的方向导数最小？

(3) 沿哪个方向的方向导数为零？

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha=(2x-y)\cos\alpha+(2y-x)\sin\alpha,$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{(1,1)}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\alpha=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，沿 $v=\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$，方向导数最大.

(2) 当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，沿 $v=\left(\cos\frac{5\pi}{4},\sin\frac{5\pi}{4}\right)$，方向导数最小.

(3) 当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时，沿 $v=\left(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 或 $v=\left(\cos\frac{7\pi}{4},\sin\frac{7\pi}{4}\right)$，方向导数为零.

9. 如果可微函数 $f(x,y)$ 在点(1,2)处的从点(1,2)到点(2,2)方向的方向导数为2，从点(1,2)到点(1,1)方向的方向导数为 -2. 求

(1) 这个函数在点(1,2)处的梯度；

(2) 点(1,2)处的从点(1,2)到点(4,6)方向的方向导数.

解 $v_1=(2,2)-(1,2)=(1,0)$，$\frac{\partial z}{\partial v_1}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0=\frac{\partial z}{\partial x}=2.$

$v_2=(1,1)-(1,2)=(0,-1)$，$\frac{\partial z}{\partial v_2}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(-1)=-\frac{\partial z}{\partial y}=-2.$

所以在(1,2)处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

(1) $\mathbf{grad}\, f(1,2)=(2,2)$.

(2) 因为 $(4,6)-(1,2)=(3,4)$，$v=\frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{(3,4)}{5}$，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{4}{5}=\frac{14}{5}.$$

10. 求下列函数的梯度：

(1) $z=x^2+y^2\sin(xy)$；　　(2) $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$；

(3) $u=x^2+2y^2+3z^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$，在点(1,1,1).

解 (1) $\mathbf{grad}\, z=(2x+y^3\cos(xy),2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy))$.

(2) $\mathbf{grad}\, z=\left(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2}\right)$.

(3) $\mathbf{grad}\ u=(2x+3y+6,4y+3x+4z-2,6z+4y-5)$, $\mathbf{grad}\ u(1,1,1)=(11,9,5)$.

11. 对于函数$f(x,y)=xy$,在第一象限(包括边界)的每一点,指出函数值增加最快的方向.

解　在$(x,y)\neq(0,0)$点,函数值增长最快的方向为$\mathbf{grad}\ f=(y,x)$;

在$(0,0)$点,由于梯度为零向量,不能直接从梯度得出函数值增长最快的方向. 设沿方向$v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$自变量的改变量为

$$\Delta x=t\cos\alpha,\Delta y=t\sin\alpha,$$

则函数值的改变量为

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y=t^2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}t^2\sin 2\alpha,$$

由此可知当$\alpha=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$时函数值增长最快,即函数值增长最快的方向为$(1,1)$和$(-1,-1)$.

12. 验证函数

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导,但除方向$\boldsymbol{e}_i$和$-\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$外,在原点的沿其他方向的方向导数都不存在.

解

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{xy}=0=f(0,0),$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=0,$$

所以函数在原点$(0,0)$连续且可偏导. 取方向$v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,则

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\lim_{t\to0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt[3]{t\cos\alpha\cdot t\sin\alpha}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt[3]{\sin 2\alpha}}{\sqrt[3]{2t}},$$

当$\sin 2\alpha=0$,即$\alpha=\frac{k\pi}{2}$时,极限存在且为零;当$\sin 2\alpha\neq0$,即$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$时,极限不存在. 所以除方向$\boldsymbol{e}_i$和$-\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$外,在原点的沿其他方向的方向导数都不存在.

13. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导,但它在该点不可微.

解　由于

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\to0((x,y)\to(0,0)),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0).$$

由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0}}-0}{\Delta x}=0, f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{\sqrt{0+\Delta y^2}}-0}{\Delta y}=0.$$

所以函数在原点(0,0)连续且可偏导．但

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$

$$=f(\Delta x,\Delta y)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

所以函数在(0,0)不可微.

14. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导函数$f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$在原点(0,0)不连续,但它在该点可微.

解 由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x^2+0^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0,$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0.$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=y}}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right),$$

极限不存在,所以$f_x(x,y)$在原点(0,0)不连续．同理$f_y(x,y)$在原点(0,0)也不连续．但由于

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$

$$=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

所以函数在(0,0)可微.

15. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点(0,0)处沿各个方向的方向导数都存在,但它在该点不连续,因而不可微.

解 函数沿方向$v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha\cdot t^3}{(\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\cdot t^2)t^3}=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, & \cos\alpha\neq 0,\\ 0, & \cos\alpha=0.\end{cases}$$

所以函数在原点(0,0)处沿各个方向的方向导数都存在．但当(x,y)沿曲线$x=ky^2$趋于(0,0)时，极限

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2ky^4}{k^2y^4+y^4}=\frac{2k}{k^2+1}$$

与k有关，所以函数在原点不连续，因而不可微.

16. 计算下列函数的高阶导数：

(1) $z=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(2) $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(3) $z=xe^{xy}$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

(4) $u=\ln(ax+by+cz)$，求$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$；

(5) $z=(x-a)^p(y-b)^q$，求$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}$；

(6) $u=xyze^{x+y+z}$，求$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$.

解　(1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(2) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(1-y)\sin(x+y)+x\cos(x+y),\frac{\partial z}{\partial y}=(1+x)\cos(x+y)-y\sin(x+y),$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2-y)\cos(x+y)-x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1-y)\cos(x+y)-(1+x)\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-y\cos(x+y)-(x+2)\sin(x+y).$$

(3) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{xy},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2x+x^2y)e^{xy},$$

得到

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=(2+4xy+x^2y^2)e^{xy},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=(3x^2+x^3y)e^{xy}.$$

(4) 经计算,可依次得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{ax+by+cz}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=\frac{a}{ax+by+cz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{a}{(ax+by+cz)^2}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=-\frac{a^2}{(ax+by+cz)^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{2a^2}{(ax+by+cz)^3}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=\frac{2a^3}{(ax+by+cz)^3},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\frac{3\cdot 2a^3}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x}=-\frac{6a^4}{(ax+by+cz)^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=\frac{2a^2}{(ax+by+cz)^3}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y}=\frac{2a^2 b}{(ax+by+cz)^3},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}=-\frac{3\cdot 2a^2 b}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y}=-\frac{6a^2b^2}{(ax+by+cz)^4}.$$

(5) $$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial^q z}{\partial y^q}\right)=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left((x-a)^p\frac{\partial^q(y-b)^q}{\partial y^q}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}^p(x-a)^p}{\mathrm{d}x^p}\frac{\mathrm{d}^q(y-b)^q}{\mathrm{d}y^q}=p!\,q!\ .$$

(6) 对 x,y,z 应用 Leibniz 公式,

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^p(x\mathrm{e}^x)}{\partial x^p}\frac{\partial^q(y\mathrm{e}^y)}{\partial y^q}\frac{\partial^r(z\mathrm{e}^z)}{\partial z^r}=\frac{\mathrm{d}^p(x\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x^p}\frac{\mathrm{d}^q(y\mathrm{e}^y)}{\mathrm{d}y^q}\frac{\mathrm{d}(z\mathrm{e}^z)}{\mathrm{d}z^r}.$$

$$=(x+p)\mathrm{e}^x\cdot(y+q)\mathrm{e}^y\cdot(z+r)\mathrm{e}^z$$

$$=(x+p)(y+q)(z+r)\mathrm{e}^{x+y+z}.$$

17. 计算下列函数的高阶微分:

(1) $z=x\ln(xy)$,求 d^2z;

(2) $z=\sin^2(ax+by)$,求 d^3z;

(3) $u=\mathrm{e}^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$,求 d^3u;

(4) $z=\mathrm{e}^x\sin y$,求 $\mathrm{d}^k z$.

解 (1) $$\mathrm{d}z=(\ln(xy)+1)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{x}\mathrm{d}x^2+\frac{2}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y^2.$$

(2) $$\mathrm{d}z=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)\mathrm{d}(ax+by)=\sin 2(ax+by)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y),$$

$$\mathrm{d}^2z=2\cos 2(ax+by)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)^2,$$

$$\mathrm{d}^3z=-4\sin 2(ax+by)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)^3.$$

(3) $$\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z)],$$

$$\mathrm{d}^2u=\mathrm{e}^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2+2(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2],$$

$$\mathrm{d}^3u=\mathrm{e}^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^3+6(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2+6(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)]$$

$$=\mathrm{e}^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+6x+6)\mathrm{d}x^3+(x^2+y^2+z^2+6y+6)\mathrm{d}y^3+(x^2+y^2+z^2+6z+6)\mathrm{d}z^3]+3\mathrm{e}^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+4x+2y+2)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y+$$

$$(x^2+y^2+z^2+4y+2z+2)\mathrm{d}y^2\mathrm{d}z+(x^2+y^2+z^2+4z+2x+2)\mathrm{d}z^2\mathrm{d}x+$$
$$(x^2+y^2+z^2+2x+4y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2+(x^2+y^2+z^2+2y+4z+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z^2+$$
$$(x^2+y^2+z^2+2z+4x+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x^2]+$$
$$6\mathrm{e}^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(4) $$\mathrm{d}^k z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^k$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^i \mathrm{e}^x}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\cdot\frac{\partial^{k-i}\sin y}{\partial y^{k-i}}\mathrm{d}y^{k-i}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mathrm{e}^x\sin\left(y+\frac{k-i}{2}\pi\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}y^{k-i}.$$

18. 函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy},\text{及}f(0,y)=2\sin y+y^3.$$

求 $f(x,y)$ 的表达式.

解　对 x 积分,得到

$$f(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+g(y),$$

再将 $f(0,y)=2\sin y+y^3$ 代入上式,得到

$$g(y)=2\sin y+y^3,$$

所以

$$f(x,y)=(2-x)\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+y^3.$$

19. 验证:

(1) $z=\mathrm{e}^{-kn^2x}\sin(ny)$ 满足热传导方程 $\frac{\partial z}{\partial x}=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(2) $u=z\arctan\frac{x}{y}$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

证　(1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=n\mathrm{e}^{-kn^2x}\cos(ny),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-n^2\mathrm{e}^{-kn^2x}\sin(ny),$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-kn^2\mathrm{e}^{-kn^2x}\sin(ny)=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(2) 由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{yz}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{xz}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\arctan\frac{x}{y},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

20. 设 $f(r,t)=t^{\alpha}e^{-\frac{r^2}{4t}}$，确定 α 使得 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

解 将

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\alpha t^{\alpha-1}+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^2\right)e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{1}{2}t^{\alpha-1}re^{-\frac{r^2}{4t}},\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\left(-\frac{3}{2}t^{\alpha-1}r^2+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^4\right)e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

代入方程，解得

$$\alpha=-\frac{3}{2}.$$

21. 求下列向量值函数在指定点的导数：

(1) $\boldsymbol{f}(x)=(a\cos x,b\sin x,cx)^{\mathrm{T}}$，在 $x=\frac{\pi}{4}$ 点；

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(3x+e^{y}\cot z,x^3+y^2\tan z)^{\mathrm{T}}$，在 $\left(1,2,\frac{\pi}{4}\right)$ 点；

(3) $\boldsymbol{g}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)^{\mathrm{T}}$，在 $(1,\pi)$ 点.

解 (1) $\boldsymbol{f}'(x)=(-a\sin x,b\cos x,c)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b,c\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2) $\boldsymbol{f}'(x,y,z)=\begin{pmatrix}3 & e^{y}\cot z & -e^{y}\csc^2 z\\ 3x^2 & 2y\tan z & y^2\sec^2 z\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{f}'\left(1,2,\frac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}3 & e^2 & -2e^2\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{g}'(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{g}'(1,\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

22. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为向量值函数.

(1) 如果坐标分量函数 $f_1(x,y,z)=x,f_2(x,y,z)=y,f_3(x,y,z)=z$，证明 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位矩阵；

(2) 写出坐标分量函数的一般形式，使 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位矩阵；

(3) 如果已知 $\boldsymbol{f}$ 的导数是对角矩阵 $\mathrm{diag}(p(x),q(y),r(z))$，那么坐标分量函数应该具有什么样的形式？

解 (1) 由于

$f_1'(x,y,z)=(1,0,0)$，$f_2'(x,y,z)=(0,1,0)$，$f_3'(x,y,z)=(0,0,1)$，所以 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位矩阵.

（2）由 $f_1'(x,y,z)=(1,0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 y,z 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=x+C_1,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=y+C_2,\quad f_3(x,y,z)=z+C_3.$$

（3）由 $f_1'(x,y,z)=(p(x),0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 y,z 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=\int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=\int q(y)\,\mathrm{d}y,\quad f_3(x,y,z)=\int r(z)\,\mathrm{d}z.$$

§2　多元复合函数的求导法则

1. 利用链式法则求偏导数：

（1）$z=\tan(3t+2x^2-y^2)$，$x=\dfrac{1}{t}$，$y=\sqrt{t}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$；

（2）$z=\mathrm{e}^{x-2y}$，$x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$；

（3）$w=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$；

（4）$z=u^2\ln v$，$u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（5）$u=\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$，$z=y^2\sin x$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

（6）$w=(x+y+z)\sin(x^2+y^2+z^2)$，$x=t\mathrm{e}^s$，$y=\mathrm{e}^t$，$z=\mathrm{e}^{s+t}$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial s},\dfrac{\partial w}{\partial t}$；

（7）$z=x^2+y^2+\cos(x+y)$，$x=u+v$，$y=\arcsin v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$；

（以下假设 f 具有二阶连续偏导数）

（8）$u=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

（9）$u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

（10）$w=f(x,y,z)$，$x=u+v$，$y=u-v$，$z=uv$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v},\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$.

解　（1）记 $u=3t+2x^2-y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\left[3+4x\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)-2y\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]\sec^2 u$$

$$=\left(2-\frac{4}{t^3}\right)\sec^2\left(2t+\frac{2}{t^2}\right).$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x-2y}\cos t-2\mathrm{e}^{x-2y}\cdot 3t^2=z(\cos t-6t^2)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}=(\cos t-6t^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t-6t^2)$$

$$=\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}[(\cos t-6t^2)^2-\sin t-12t].$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$

$$=\frac{a\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$

$$=\mathrm{e}^{ax}\sin x.$$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{u^2}{v}\cdot 3$

$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=u\cdot 2x+u\cdot 2z\cdot y^2\cos x$

$$=\mathrm{e}^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2x+2y^4\sin x\cos x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=u\cdot 2y+u\cdot 2z\cdot 2y\sin x$$

$$=\mathrm{e}^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2y+4y^3\sin^2 x).$$

(6) 记 $u=x^2+y^2+z^2$, $v=x+y+z$. 则

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=x(\sin u+2xv\cos u)+0(\sin u+2yv\cos u)+z(\sin u+2zv\cos u)$$

$$=t\mathrm{e}^{s}(\sin u+2xv\cos u)+\mathrm{e}^{s+t}(\sin u+2zv\cos u),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=\mathrm{e}^{s}(\sin u+2xv\cos u)+y(\sin u+2yv\cos u)+z(\sin u+2zv\cos u)$$

$$=\mathrm{e}^{s}(\sin u+2xv\cos u)+\mathrm{e}^{t}(\sin u+2yv\cos u)+\mathrm{e}^{s+t}(\sin u+2zv\cos u).$$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=[2x-\sin(x+y)]\cdot 1+[2y-\sin(x+y)]\cdot 0$

$$=2(u+v)-\sin(u+v+\arcsin v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=2-\cos(u+v+\arcsin v)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right).$$

（8）记 $v=xy, w=\dfrac{x}{y}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=yf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=xf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x\frac{\partial}{\partial x}f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)\\&=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x\frac{\partial}{\partial y}f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)\\&=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x^2f_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

（9）记 $v=x^2+y^2+z^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=2f'(x^2+y^2+z^2)+2x\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)\\&=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=2y\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)\\&=4xyf''(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

（10）$\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}=f_x+f_y+vf_z,$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=f_x-f_y+uf_z,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}=f_z+\frac{\partial f_x}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial u}+u\frac{\partial f_z}{\partial u}\\&=f_z+\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}+\\&\quad u\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\&=f_{xx}+(u+v)f_{xz}-f_{yy}+(u-v)f_{yz}+f_z+uvf_{zz}.\end{aligned}$$

2. 设$f(x,y)$具有连续偏导数,且$f(x,x^2)=1$,$f_x(x,x^2)=x$,求$f_y(x,x^2)$.

解 在等式$f(x,x^2)=1$两边对x求导,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=f_x(x,x^2)+2xf_y(x,x^2)=0,$$

再将$f_x(x,x^2)=x$代入,即可得到

$$f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}.$$

3. 设$f(x,y)$具有连续偏导数,且$f(1,1)=1$,$f_x(1,1)=2$,$f_y(1,1)=3$. 如果$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$,求$\varphi'(1)$.

解
$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x},$$

其中

$$y(x)=f(x,x),\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x).$$

由于$y(1)=f(1,1)=1$,以$x=1$代入上述等式,得到

$$\varphi'(1)=f_x(1,1)+f_y(1,1)(f_x(1,1)+f_y(1,1))=17.$$

4. 设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中$f(t)$具有连续导数,且$f(t)\neq 0$,求$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{f^2(x^2-y^2)}\frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial x}=-\frac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}-\frac{y}{f^2(x^2-y^2)}\frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}+\frac{2y^2f'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)},$$

直接计算可得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{yf(x^2-y^2)}.$$

5. 设$z=\arctan\frac{x}{y}$,$x=u+v$,$y=u-v$,验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

证
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}=\frac{y+x}{x^2+y^2},$$

又由于$x^2+y^2=(u+v)^2+(u-v)^2=2u^2+2v^2$,所以

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

6. 设 φ 和 ψ 具有二阶连续导数，验证

(1) $u=y\varphi(x^2-y^2)$ 满足 $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{y}u$；

(2) $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\dfrac{\partial\varphi(x^2-y^2)}{\partial x}$

$$=y\varphi'(x^2-y^2)\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}=2xy\varphi'(x^2-y^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)+y\frac{\partial\varphi(x^2-y^2)}{\partial y}$$

$$=\varphi(x^2-y^2)+y\varphi'(x^2-y^2)\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)-2y^2\varphi'(x^2-y^2),$$

所以

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}u.$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at)$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at),$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

7. 设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，写出 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在坐标变换

$$\begin{cases}u=x^2-y^2,\\ v=2xy\end{cases}$$

下的表达式.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x\dfrac{\partial z}{\partial u}+2y\dfrac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{\partial z}{\partial u}+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=2\frac{\partial z}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+8xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial z}{\partial u}-2y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=-2\frac{\partial z}{\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-8xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

由于 $u^2+v^2=x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2$,所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=4\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

8. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$,求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}.$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}.$$

9. 如果函数 $f(x,y)$ 满足:对于任意的实数 t 及 x,y,成立

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),$$

那么 f 称为 n 次齐次函数.

(1) 证明 n 次齐次函数 f 满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf;$$

(2) 利用上述性质,对于 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 求出 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

证 (1) 在等式 $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ 两边对 t 求导,

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial t}=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y),$$

将 $t=1$ 代入即得到

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

(2) 由于 $z(tx,ty)=tz(x,y)$,所以 $n=1$,由(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

10. 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 令 $u=xy,v=\frac{x}{y}$,则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}=xf_1(u,v)-\frac{x}{y^2}f_2(u,v)-\frac{x}{y^2}g'(v),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1(u,v)-\frac{1}{y^2}f_2(u,v)-\frac{1}{y^2}g'(v)+x\left[f_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]-$$

$$\frac{x}{y^2}\left[f_{21}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{22}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}+g''(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-$$

$$\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}g''\left(\frac{x}{y}\right).$$

11. 设向量值函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases}x=u^2+v^2,\\ y=u^2-v^2,\\ z=uv.\end{cases}$$

向量值函数 $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases}u=r\cos\theta,\\ v=r\sin\theta.\end{cases}$$

求复合函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 的导数.

解　$\boldsymbol{f}'(u,v)=\begin{pmatrix}2u & 2v\\ 2u & -2v\\ v & u\end{pmatrix},\boldsymbol{g}'(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$,

所以

$$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'(r,\theta)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(r,\theta))\boldsymbol{g}'(r,\theta)=\begin{pmatrix}2r\cos\theta & 2r\sin\theta\\ 2r\cos\theta & -2r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2r & 0\\ 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta\\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta\end{pmatrix}.$$

12. 设 $w=f(x,u,v),u=g(y,z),v=h(x,y)$，求 $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}$.

解　$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_x+f_vh_x$,

$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_ug_y+f_vh_y$,

$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=f_ug_z$.

13. 设 $z=u^v,u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$=vu^{v-1}\frac{x}{x^2+y^2}+u^v\ln u\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=vu^{v-1}\frac{x}{x^2+y^2}-u^v\ln u\frac{y}{x^2+y^2},$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

$$= vu^{v-1}\frac{y}{x^2+y^2} + u^v \ln u \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= vu^{v-1}\frac{y}{x^2+y^2} + u^v \ln u \frac{x}{x^2+y^2},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = u^{v-1}\left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}v + \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}u\ln u\right),$$

其中 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}, v = \arctan\frac{y}{x}$.

14. 设 $z = (x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$,求 dz 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-\arctan\frac{y}{x}} + (x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= (2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-\arctan\frac{y}{x}} + (x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= (2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = [(2x+y)dx + (2y-x)dy]e^{-\arctan\frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{-\arctan\frac{y}{x}} + (2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

15. 求下列函数的全微分:

(1) $u = f(ax^2+by^2+cz^2)$;

(2) $u = f(x+y, xy)$;

(3) $u = f(\ln(1+x^2+y^2+z^2), e^{x+y+z})$.

解 (1) 令 $v = ax^2+by^2+cz^2$,则

$$du = f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)$$

$$= 2f'(ax^2+by^2+cz^2)(axdx + bydy + czdz).$$

(2) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$= (f_1 + yf_2)dx + (f_1 + xf_2)dy.$$

(3) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$= \frac{2f_1}{1+x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz) + (e^{x+y+z}f_2)(dx+dy+dz).$$

16. 设 $f(t)$ 具有任意阶连续导数，而 $u=f(ax+by+cz)$. 对任意正整数 k，求 $\mathrm{d}^k u$.

解　当 $k=1$ 时，成立

$$\mathrm{d}u=f'(ax+by+cz)\mathrm{d}(ax+by+cz)=f'(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z),$$

应用数学归纳法，假设对于 k 成立

$$\mathrm{d}^k u=f^{(k)}(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z)^k,$$

则对于 $k+1$ 成立

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{k+1}u&=\mathrm{d}(\mathrm{d}^k u)=\mathrm{d}[f^{(k)}(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z)^k]\\&=f^{(k+1)}(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z)^{k+1}.\end{aligned}$$

由数学归纳法可知对任意正整数 k 成立

$$\mathrm{d}^k u=f^{(k)}(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z)^k.$$

17. 设函数 $z=f(x,y)$ 在全平面上有定义，具有连续的偏导数，且满足方程

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0,$$

证明：$f(x,y)$ 为常数.

证　当 $r\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}f(r\cos\theta,r\sin\theta)&=\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\\&=\frac{1}{r}(xf_x(x,y)+xf_y(x,y))=0,\end{aligned}$$

所以

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta).$$

再利用 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性，得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta)=f(0,0),$$

即 $F(\theta)$ 为常数，所以 $f(x,y)$ 为常数.

18. 设 n 元函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上具有连续偏导数，证明对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，成立下述 **Hadamard 公式**：

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\mathrm{d}t.$$

证　设 $F(t)=f(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))$，则

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=F(1)-F(0)=\int_0^1 F'(t)\mathrm{d}t.$$

由于

$$\begin{aligned}F'(t)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\frac{\partial(x_i+t(y_i-x_i))}{\partial t}\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})&=F(1)-F(0)\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

§3 中值定理和 Taylor 公式

1. 对函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 应用中值定理证明：存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

证 设 $(x_0,y_0)=(0,0)$，$(\Delta x,\Delta y)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，对函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 应用微分中值定理（即 $k=0$ 时的 Taylor 公式），可知存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}&=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)-f(0,0)=f_x(\theta\Delta x,\theta\Delta y)\Delta x+f_y(\theta\Delta x,\theta\Delta y)\Delta y\\&=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.\end{aligned}$$

2. 写出函数 $f(x,y)=3x^3+y^3-2x^2y-2xy^2-6x-8y+9$ 在点 $(1,2)$ 的 Taylor 展开式.

解
$$\begin{aligned}f(x,y)=&3[(x-1)+1]^3+[(y-2)+2]^3-2[(x-1)+1]^2[(y-2)+2]-\\&2[(x-1)+1][(y-2)+2]^2-6[(x-1)+1]-8[(y-2)+2]+9\\=&-14-13(x-1)-6(y-2)+5(x-1)^2-12(x-1)(y-2)+4(y-2)^2+\\&3(x-1)^3-2(x-1)^2(y-2)-2(x-1)(y-2)^2+(y-2)^3.\end{aligned}$$

注 本题也可设 $u=x-1$，$v=y-2$，于是

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(u+1,v+2)\\=&3(u+1)^3+(v+2)^3-2(u+1)^2(v+2)-\\&2(u+1)(v+2)^2-6(u+1)-8(v+2)+9,\end{aligned}$$

展开后再用 $u=x-1$，$v=y-2$ 代换回来.

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 点的 Taylor 展开式（展开到三阶导数为止）.

解
$$\begin{aligned}f(x,y)=&\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)\\=&xy-\frac{1}{2}xy^2+o((\sqrt{x^2+y^2})^3).\end{aligned}$$

4. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 n 阶 Taylor 展开式，并写出余项.

解 $f(x,y)=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n$，

其中 $R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)}$，$\theta\in(0,1)$.

5. 设 $f(x,y)=\frac{\cos y}{x}$，$x>0$.

(1) 求 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的 Taylor 展开式（展开到二阶导数），并计算余项 R_2；

(2) 求 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的 k 阶 Taylor 展开式，并证明在 $(1,0)$ 点的某个邻域内，

余项 R_k 满足当 $k\to\infty$ 时，$R_k\to 0$.

解　(1) $f(x,y)=1-(x-1)+(x-1)^2-\frac{1}{2}y^2+R_2$,

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(1+\theta(x-1),\theta y)$$

$$=-\frac{\cos\eta}{\xi^4}(x-1)^3-\frac{\sin\eta}{\xi^3}(x-1)^2y+\frac{\cos\eta}{2\xi^2}(x-1)y^2+\frac{\sin\eta}{6\xi}y^3,$$

其中 $\xi=1+\theta(x-1)$，$\eta=\theta y$，$0<\theta<1$.

$$(2)\ f(x,y)=1+\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^{n-j}(n-j)!\cos\left(\frac{j}{2}\pi\right)(x-1)^{n-j}y^j\right]+R_k,$$

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}C_{k+1}^j(-1)^{k+1-j}(k+1-j)!\,\frac{1}{\xi^{k-j+2}}\cos\left(\eta+\frac{j}{2}\pi\right)(x-1)^{k+1-j}y^j.$$

当 $x=1$ 时，$\xi=1$，对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，$R_k\to 0$（$k\to\infty$）显然成立；当 $0<|x-1|<\frac{1}{3}$ 时，$\frac{2}{3}<\xi<\frac{4}{3}$，$\left|\frac{x-1}{\xi}\right|<\frac{1}{2}$，于是对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|R_k|\leqslant\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{j!\ (k+1-j)!}(k+1-j)!\,\frac{1}{|\xi|^{k-j+2}}|x-1|^{k+1-j}|y|^j$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1-j}|y|^j\leqslant\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|^j=\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}e^{\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|},$$

因此也成立 $R_k\to 0$（$k\to\infty$）.

6. 利用 Taylor 公式近似计算 $8.96^{2.03}$（展开到二阶导数）.

解　考虑 $f(x,y)=(9+x)^{2+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 Taylor 公式：

$$f(x,y)=81+18x+81\ln 9\cdot y+x^2+(9+18\ln 9)xy+\frac{81}{2}\ln^2 9\cdot y^2+R_2(x,y),$$

于是

$$8.96^{2.03}=f(-0.04,0.03)\approx 81+18(-0.04)+81\ln 9\cdot 0.03+$$

$$(-0.04)^2+(9+18\ln 9)\cdot(-0.04)\cdot 0.03+\frac{81}{2}\cdot\ln^2 9\cdot 0.03^2$$

$$\approx 85.74.$$

7. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微．$\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的单位向量（方向）．若

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(x,y)\equiv 0,\quad i=1,2,$$

证明：在 $\mathbf{R}^2$ 上 $f(x,y)\equiv$ 常数.

证　设 $\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1)$，$\boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\sin\alpha_2)$．由于 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha_1+f_y(x,y)\sin\alpha_1\equiv 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha_2+f_y(x,y)\sin\alpha_2\equiv 0.$$

因为 $\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 线性无关，所以

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此上面的线性方程组只有零解，即

$$f_x(x,y)\equiv 0,\quad f_y(x,y)\equiv 0.$$

于是由推论 12.3.1 知道 $f(x,y)\equiv$常数.

8. 设 $f(x,y)=\sin\frac{y}{x}(x\neq 0)$，证明：

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)\equiv 0, k\geqslant 1.$$

证 因为

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=x\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\equiv 0,$$

所以当 $k>1$ 时成立

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\equiv 0.$$

§4 隐 函 数

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\sin y+e^x-xy^2=0$，求$\frac{dy}{dx}$；

(2) $x^y=y^x$，求$\frac{dy}{dx}$；

(3) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{dy}{dx}$；

(4) $\arctan\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$；

(5) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(6) $e^z-xyz=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(7) $z^3-3xyz=a^3$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(8) $f(x+y,y+z,z+x)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(9) $z=f(xz,z-y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

(10) $f(x,x+y,x+y+z)=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　(1) 设 $F(x,y)=\sin y+e^{x}-xy^{2}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y^{2}-e^{x}}{\cos y-2xy}.$$

(2) 设 $F(x,y)=x^{y}-y^{x}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}.$$

注　本题也可先在等式 $x^{y}=y^{x}$ 两边取对数,然后设

$$G(x,y)=y\ln x-x\ln y=0.$$

(3) 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}-\arctan\frac{y}{x}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

(4) 设 $F(x,y)=\arctan\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{a^{2}}{(x+y)^{2}},$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{2a^{2}}{(x+y)^{3}}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{2a^{2}}{(x+y)^{5}}[a^{2}+(x+y)^{2}].$$

(5) 设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^{2}}{y(x+z)}.$$

(6) 设 $F(x,y,z)=e^{z}-xyz=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^{z}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^{z}-xy},$$

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y}{e^{z}-xy}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{yz}{(e^{z}-xy)^{2}}\left(e^{z}\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=\frac{2y^{2}z}{(e^{z}-xy)^{2}}-\frac{y^{2}z^{2}e^{z}}{(e^{z}-xy)^{3}},$$

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{e^{z}-xy}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{xz}{(e^{z}-xy)^{2}}\left(e^{z}\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)$$

$$=\frac{z}{e^{z}-xy}+\frac{2xyz}{(e^{z}-xy)^{2}}-\frac{xyz^{2}e^{z}}{(e^{z}-xy)^{3}}.$$

(7) 设 $F(x,y,z)=z^{3}-3xyz-a^{3}=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^{2}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^{2}-xy},$$

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y}{z^{2}-xy}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{yz}{(z^{2}-xy)^{2}}\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=-\frac{2xy^{3}z}{(z^{2}-xy)^{3}},$$

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{z^{2}-xy}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{xz}{(z^{2}-xy)^{2}}\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)$$

$$=\frac{z^{5}-2xyz^{3}-x^{2}y^{2}z}{(z^{2}-xy)^{3}}.$$

(8) 由 $f(x+y,y+z,z+x)=0$ 即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+f_3}{f_2+f_3},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_1+f_2}{f_2+f_3}.$$

(9) 设 $F(x,y,z)=z-f(xz,z-y)=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{zf_1}{1-xf_1-f_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{f_2}{1-xf_1-f_2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{1-xf_1-f_2}\left[\frac{\partial z}{\partial x}f_1+z\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{11}+z\frac{\partial z}{\partial x}f_{12}\right]+$$

$$\frac{zf_1}{(1-xf_1-f_2)^2}\left[f_1+x\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{11}+x\frac{\partial z}{\partial x}f_{12}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{21}+\frac{\partial z}{\partial x}f_{22}\right]$$

$$=\frac{1}{1-xf_1-f_2}\left[2\frac{\partial z}{\partial x}f_1+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2f_{11}+2\frac{\partial z}{\partial x}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{12}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2f_{22}\right].$$

(10) 由 $f(x,x+y,x+y+z)=0$ 即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+f_2+f_3}{f_3},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_2+f_3}{f_3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{f_3}\left[f_{11}+f_{12}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{13}+f_{21}+f_{22}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{23}\right]+$$

$$\frac{f_1+f_2}{f_3^2}\left[f_{31}+f_{32}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{33}\right]$$

$$=-\frac{1}{f_3^3}[f_3^2(f_{11}+2f_{12}+f_{22})-2f_3(f_1+f_2)(f_{13}+f_{23})+(f_1+f_2)^2f_{33}],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{1}{f_3}\left[f_{21}+f_{22}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{23}\right]+\frac{f_2}{f_3^2}\left[f_{31}+f_{32}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{33}\right]$$

$$=-\frac{1}{f_3^3}[f_3^2(f_{12}+f_{22})-f_2f_3f_{13}+f_2(f_1+f_2)f_{33}-f_3(f_1+2f_2)f_{23}].$$

2. 设 $y=\tan(x+y)$ 确定 y 为 x 的隐函数,验证

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}.$$

证 由

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')=(1+y^2)(1+y')$$

解出

$$y'=-1-\frac{1}{y^2},$$

再求二阶和三阶导数,有

$$y''=\frac{2}{y^3}y'=-\frac{2}{y^3}-\frac{2}{y^5},$$

$$y'''=\left(\frac{6}{y^4}+\frac{10}{y^6}\right)y'=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}.$$

3. 设 φ 是可微函数,证明由 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 满足方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

证　由 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\varphi_1}{-a\varphi_1-b\varphi_2}=\frac{c\varphi_1}{a\varphi_1+b\varphi_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c\varphi_2}{-a\varphi_1-b\varphi_2}=\frac{c\varphi_2}{a\varphi_1+b\varphi_2},$$

所以

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

4. 设方程 $\varphi(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$，证明它满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

证　由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_1+z\left(-\frac{1}{x^2}\right)\varphi_2}{\frac{1}{y}\varphi_1+\frac{1}{x}\varphi_2}=\frac{yz\varphi_2-x^2y\varphi_1}{x(x\varphi_1+y\varphi_2)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\left(-\frac{1}{y^2}\right)\varphi_1+\varphi_2}{\frac{1}{y}\varphi_1+\frac{1}{x}\varphi_2}=\frac{xz\varphi_1-xy^2\varphi_2}{y(x\varphi_1+y\varphi_2)},$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

5. 求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\begin{cases}z-x^2-y^2=0,\\x^2+2y^2+3z^2=4a^2,\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$；

(2) $\begin{cases}xu+yv=0,\\yu+xv=1,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$；

(3) $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$；

(4) $\begin{cases}x=u+v,\\y=u-v,\\z=u^2v^2,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u\cos v,\\y=\mathrm{e}^u\sin v,\\z=u^2+v^2,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　(1) 在方程组中对 x 求导，得到

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2x-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\\2x+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$$

由此解出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x(1+6z)}{y(2+6z)},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{1+3z}.$$

再求二阶导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{(1+6z)}{y(2+6z)}+\frac{x(1+6z)}{y^2(2+6z)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{x(-3)}{2y(1+3z)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{1}{2y}\left[\frac{1}{1+3z}-\frac{x^2(1+6z)^2}{2y^2(1+3z)^2}-\frac{3x^2}{(1+3z)^3}-2\right],$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{1+3z}-\frac{3x}{(1+3z)^2}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+3z}-\frac{3x^2}{(1+3z)^3}.$$

(2) 在方程组中对 x 求偏导,得到

$$\begin{cases}u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{ux-vy}{y^2-x^2},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{vx-uy}{y^2-x^2}.$$

在方程组中对 y 求偏导,得到

$$\begin{cases}x\dfrac{\partial u}{\partial y}+v+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{vx-uy}{y^2-x^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{ux-vy}{y^2-x^2}.$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2-x^2}\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{ux-vy}{(y^2-x^2)^2}2x=\frac{2u(x^2+y^2)-4xyv}{(y^2-x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y^2-x^2}\left(v+x\frac{\partial v}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{vx-uy}{(y^2-x^2)^2}2x=\frac{2v(x^2+y^2)-4xyu}{(y^2-x^2)^2}.$$

(3) 在方程组中对 x 求偏导,得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)f_1+\dfrac{\partial v}{\partial x}f_2,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)g_1+2vyg_2\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_2g_1+uf_1(2vyg_2-1)}{f_2g_1-(xf_1-1)(2vyg_2-1)},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(1-xf_1)g_1-uf_1g_1}{f_2g_1-(xf_1-1)(2vyg_2-1)}.$$

(4) 在方程组中分别对 x 与 y 求偏导,得到

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1=\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}$$

解此两方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\quad 与\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2uv^2\frac{\partial u}{\partial x}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial x}=uv(u+v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2uv^2\frac{\partial u}{\partial y}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial y}=uv(v-u).$$

（5）在方程组中对 x 求偏导，得到

$$\begin{cases}1=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v,\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(u\cos v-v\sin v)}{e^u}.$$

在方程组中对 y 求偏导，得到

$$\begin{cases}0=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v,\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2(v\cos v+u\sin v)}{e^u}.$$

6. 求微分：

（1）$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\mathrm{d}z$；

（2）$\begin{cases}x+y=u+v,\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v},\end{cases}$ 求 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}v$.

解　（1）直接对等式两边求微分，得到

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0,$$

由此解出

$$\mathrm{d}z=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}x+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}y.$$

（2）直接在方程组中求微分，得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v,\\ \dfrac{1}{y}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{\cos u}{\sin v}\mathrm{d}u-\dfrac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\mathrm{d}v,\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$du=\frac{\sin v+x\cos v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy,$$

$$dv=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy.$$

7. 设$\begin{cases}x=x(y),\\ z=z(y)\end{cases}$是由方程组$\begin{cases}F(y-x,y-z)=0,\\ G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0\end{cases}$所确定的向量值隐函数,其中二元函数 F 和 G 分别具有连续的偏导数,求$\dfrac{dx}{dy}$和$\dfrac{dz}{dy}$.

解 在方程组中对 y 求导数,有

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{dx}{dy}\right)F_1+\left(1-\dfrac{dz}{dy}\right)F_2=0,\\ \left(x+y\dfrac{dx}{dy}\right)G_1+\left(-\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{dz}{dy}\right)G_2=0,\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{yF_1G_2+xy^2F_2G_1+(y-z)F_2G_2}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)},$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{zF_1G_2-y^3F_2G_1-y^2(x+y)F_1G_1}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)}.$$

8. 设$f(x,y)$具有二阶连续偏导数. 在极坐标$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$变换下,求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

关于极坐标的表达式.

解 经计算,有

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}-r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+$$

$$r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$$

$$=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

容易验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

9. 设二元函数 f 具有二阶连续偏导数．证明：通过适当线性变换

$$\begin{cases} u=x+\lambda y, \\ v=x+\mu y, \end{cases}$$

可以将方程

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \qquad (AC-B^2<0)$$

化简为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0.$$

并说明此时 λ,μ 为一元二次方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 的两个相异实根.

证　经计算，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial u}+\mu\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\lambda\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\mu\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

所以

$$0=A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=(A+2B\lambda+C\lambda^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(A+2B\mu+C\mu^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2[A+B(\lambda+\mu)+C\lambda\mu]\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}.$$

由条件 $AC-B^2<0$ 知一元二次方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两个相异实根，所以只要取 λ,μ 为方程的两个相异实根．此时由 $\lambda+\mu=-\dfrac{2B}{C}$ 与 $\lambda\mu=\dfrac{A}{C}$，可得

$$A+B(\lambda+\mu)+C\lambda\mu=2\frac{AC-B^2}{C}\neq 0,$$

于是原方程化简为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0.$

10. 通过自变量变换 $\begin{cases} x=e^{\xi}, \\ y=e^{\eta} \end{cases}$ 变换方程

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,a,b,c\text{ 为常数}.$$

解 由 $\xi=\ln x,\eta=\ln y$,可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \xi},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \xi},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\partial \xi}.$$

代入原方程,得到

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0.$$

11. 通过自变量变换 $\begin{cases}u=x-2\sqrt{y},\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y},y>0.$$

解 经计算,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

代入原方程,得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$$

所以原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

12. 导出新的因变量关于新的自变量的偏导数所满足的方程:

(1) 用 $\begin{cases}u=x^2+y^2,\\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$ 及 $w=\ln z-(x+y)$ 变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z;$$

(2) 用 $\begin{cases}u=x,\\ v=x+y\end{cases}$ 及 $w=x+y+z$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$$

(3) 用 $\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$ 及 $w=\dfrac{z}{x}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 (1) 由 $w=\ln z-(x+y)$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{\partial w}{\partial x}+1\right)=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{\partial w}{\partial y}+1\right)=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right).$$

代入

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

得到

$$z\left(2xy\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+y\right)-z\left(2xy\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+x\right)-z(y-x)=0,$$

化简后得到

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

（2）由 $w=x+y+z$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}-1=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}-1=\frac{\partial w}{\partial v}-1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

（3）由 $w=\frac{z}{x}$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=w+x\frac{\partial w}{\partial x}=w+\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$$
$$=2\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial^2 u}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

代入

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

13. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的隐函数，其中 f 和 F 都具有连续偏导数. 证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证 设由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的隐函数为 $t=h(x,y)$，于是就由方程 $y=f(x,t)=f(x,h(x,y))$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，并由此可知 t 也是 x 的一元函数，即 $t=h(x,y(x))=t(x)$.

首先在等式 $F(x,y,t)=F(x,y(x),t(x))=0$ 两边对 x 求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0,$$

解出

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}},$$

然后再在等式 $y=f(x,t(x))$ 两边对 x 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{-1},$$

从而解出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

14. 设二元函数 $f(x,y):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 具有连续偏导数，证明：存在一对一的连续的向量值函数 $\boldsymbol{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$，使得

$$f\circ\boldsymbol{G}\equiv\text{常数}.$$

证 若函数 $f(x,y)$ 恒等于常数，则任意的一对一的连续的向量值函数 $\boldsymbol{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$（例如 $\boldsymbol{G}(t)=(t,t)$）都满足要求.

现假设函数 $f(x,y)$ 不恒等于常数，则存在 (x_0,y_0)，使得 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为 0，不妨设 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$. 记 $F(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$，它满足定理 12.4.1 的所有条件，所以在 x_0 的邻域 (a,b) 存在严格单调的连续函数 $y=g(x)$ 满足 $F(x,g(x))\equiv 0$，即 $f(x,g(x))\equiv$ 常数.

设 $t=\tan\pi\left(\dfrac{x-a}{b-a}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的逆函数为 $x=x(t):(-\infty,+\infty)\to(a,b)$，则

$$\boldsymbol{G}(t)=(x(t),g(x(t)))$$

是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 的一对一的连续的向量值函数，满足题目要求.

§5　偏导数在几何中的应用

1. 求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程：

(1) $\begin{cases} y=x^2, \\ z=\dfrac{x}{1+x}, \end{cases}$ 在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点；

(2) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \\ z=4\sin\dfrac{t}{2}, \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$对应的点；

(3) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6, \end{cases}$ 在$(1,-2,1)$点；

(4) $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x^2+z^2=R^2, \end{cases}$ 在$\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$点.

解　(1) 曲线的切向量函数为$\left(1,2x,\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)$，在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切向量为$\left(1,2,\dfrac{1}{4}\right)$. 于是曲线在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切线方程为

$$2(x-1)=y-1=4(2z-1),$$

法平面方程为

$$8x+16y+2z=25.$$

(2) 曲线的切向量函数为$(1-\cos t,\sin t,2\cos\dfrac{t}{2})$，在 $t=\dfrac{\pi}{2}$对应点的切向量为$(1,1,\sqrt{2})$. 于是曲线在 $t=\dfrac{\pi}{2}$对应点的切线方程为

$$x-\frac{\pi}{2}+1=y-1=\frac{\sqrt{2}}{2}z-2,$$

法平面方程为

$$\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0.$$

(3) 曲线的切向量函数为$2(y-z,z-x,x-y)$，在$(1,-2,1)$点的切向量为$(-6,0,6)$. 于是曲线在$(1,-2,1)$点的切线方程为

$$\begin{cases} x+z=2, \\ y=-2, \end{cases}$$

法平面方程为

$$x=z.$$

(4) 曲线的切向量函数为$4(yz,-xz,-xy)$，在$\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$点的切向量为$2R^2(1,$

$-1,-1)$. 于是曲线在$\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$点的切线方程为

$$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=-y+\frac{R}{\sqrt{2}}=-z+\frac{R}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x-y-z+\frac{\sqrt{2}}{2}R=0.$$

2. 在曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$上求一点,使曲线在这一点的切线与平面$x+2y+z=10$平行.

解 曲线的切向量为$(1,2t,3t^2)$,平面的法向量为$(1,2,1)$,由题设,

$$(1,2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=1+4t+3t^2=0,$$

由此解出$t=-1$或$-\frac{1}{3}$,于是

$$(-1,1,-1)\text{和}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$$

为满足题目要求的点.

3. 求曲线$x=\sin^2 t,y=\sin t\cos t,z=\cos^2 t$在$t=\frac{\pi}{2}$所对应的点处的切线的方向余弦.

解 曲线的切向量函数为$(\sin 2t,\cos 2t,-\sin 2t)$,将$t=\frac{\pi}{2}$代入得$(0,-1,0)$,它是单位向量,所以是方向余弦.

4. 求下列曲面在指定点的切平面与法线方程:

(1) $z=2x^4+3y^3$,在点$(2,1,35)$;

(2) $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$,在点$(\ln 2,\ln 2,1)$;

(3) $x=u+v,y=u^2+v^2,z=u^3+v^3$,在点$u=0,v=1$所对应的点.

解 (1) 曲面的法向量函数为$(8x^3,9y^2,-1)$,以$(x,y,z)=(2,1,35)$代入,得到$(64,9,-1)$,所以切平面方程为

$$64(x-2)+9(y-1)-(z-35)=0,\text{即}\ 64x+9y-z-102=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{64}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-35}{-1}.$$

(2) 曲面的法向量函数为$\left(e^{\frac{x}{z}}\frac{1}{z},e^{\frac{y}{z}}\frac{1}{z},-\frac{x}{z^2}e^{\frac{x}{z}}-\frac{y}{z^2}e^{\frac{y}{z}}\right)$,以$(x,y,z)=(\ln 2,\ln 2,1)$代入,得到$(2,2,-4\ln 2)$,所以切平面方程为

$$x-\ln 2+y-\ln 2-2\ln 2(z-1)=0,\text{即}\ x+y-2z\ln 2=0,$$

法线方程为

$$x-\ln 2=y-\ln 2=-\frac{1}{2\ln 2}(z-1).$$

（3）由于 $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{pmatrix}$，所以在 $u=0,v=1$ 所对应的点处的法向量为 $(0,-3,2)$，所以切平面方程为

$$-3(y-1)+2(z-1)=0,\quad \text{即}\quad -3y+2z+1=0,$$

法线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\ \dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{2},\end{cases}\qquad \text{即}\quad \begin{cases}x=1,\\ 2y+3z=5.\end{cases}$$

5. 在马鞍面 $z=xy$ 上求一点，使得这一点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直，并写出此法线的方程.

解　马鞍面的法向量 $(y,x,-1)$ 与 $(1,3,1)$ 平行，所以 $\dfrac{y}{1}=\dfrac{x}{3}=\dfrac{-1}{1}$，即 $y=-1,x=-3$，$z=xy=3$，于是该点为 $(-3,-1,3)$，在该点处的法线方程为

$$x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3.$$

6. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=498$ 的平行于平面 $x+3y+5z=7$ 的切平面.

解　由于椭球面的法向量 $(2x,4y,6z)$ 与 $(1,3,5)$ 平行，所以 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{3}=\dfrac{3z}{5}$，解出 $y=\dfrac{3}{2}x,z=\dfrac{5}{3}x$，代入椭球面方程可得 $x=\pm 6$，即切点为 $\pm(6,9,10)$. 所以有两个切平面满足条件，切平面的方程分别为

$$(x-6)+3(y-9)+5(z-10)=0\quad 与\quad (x+6)+3(y+9)+5(z+10)=0,$$

即

$$x+3y+5z\pm 83=0.$$

7. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与马鞍面 $bz=xy$ 的交角.

解　设 (x,y,z) 是圆柱面与马鞍面交线上一点. 圆柱面在该点的法向量为 $(2x,2y,0)$，马鞍面在该点的法向量为 $(y,x,-b)$，于是两法向量的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}\cdot\frac{(y,x,-b)}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}}=\frac{2xy}{a\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以

$$\theta=\arccos\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

8. 已知曲面 $x^2-y^2-3z=0$，求经过点 $A(0,0,-1)$ 且与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ 平行的切平面的方程.

解　设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在该点的法向量为 $(2x_0,-2y_0,-3)$，切平面方程为

$$2x_0x-2y_0y-3(z+1)=0.$$

由于切点在切平面上，所以 $2x_0^2-2y_0^2-3(z_0+1)=0$，与曲面方程相比较可得 $z_0=1$. 由

于切平面与直线平行，所以

$$(2x_0, -2y_0, -3) \cdot (2,1,2) = 4x_0 - 2y_0 - 6 = 0,$$

与曲面方程联立，并注意到 $z_0 = 1$，可以求出切点坐标为 $(2,1,1)$. 于是，切平面方程为

$$4x - 2y - 3z - 3 = 0.$$

9. 设椭球面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，求函数 $u = \dfrac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

解 曲面的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = \dfrac{(4x,6y,2z)}{\|(4x,6y,2z)\|}$，将点 $P(1,1,1)$ 的坐标代入，得到 $\boldsymbol{n} = \dfrac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}$. 于是，函数 u 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, -\sqrt{14}\right) \cdot \frac{(2,3,1)}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}.$$

10. 证明：曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\ (a > 0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证 设切点为 (x_0, y_0, z_0)，则曲面在该点的法向量为 $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}, \dfrac{1}{2\sqrt{y_0}}, \dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$，切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a},$$

所以截距之和为

$$\sqrt{x_0}\sqrt{a} + \sqrt{y_0}\sqrt{a} + \sqrt{z_0}\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a.$$

11. 证明：曲线

$$\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t, \\ z = ae^t \end{cases}$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证 易知曲线的切向量为 $ae^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$，锥面的母线方向为 $(x,y,z) = ae^t(\cos t, \sin t, 1)$，假定它们的夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) \cdot (\cos t, \sin t, 1)}{\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1^2}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

12. 证明：曲面 $f(ax - bz, ay - cz) = 0$ 上的切平面都与某一定直线平行，其中函数 f 具有连续偏导数，且常数 a,b,c 不同时为零.

证 曲面的法向量为 $(af_1, af_2, -bf_1 - cf_2)$，由于 $(af_1, af_2, -bf_1 - cf_2) \cdot (b,c,a) \equiv 0$，所以曲面的法向量与非零向量 (b,c,a) 垂直，即曲面的切平面都与向量 (b,c,a) 平

行，也就是与以此向量的方向为方向的直线平行.

13. 证明：曲面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)(x\neq 0)$ 在任一点处的切平面都通过原点，其中函数 f 具有连续偏导数.

证　易知曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right),f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right),-1\right),$$

因此过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)(x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

容易验证，$(0,0,0)$ 满足上述方程，即所有切平面都经过原点.

14. 证明：曲面 $F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)=0$ 的所有切平面都过某一定点，其中函数 F 具有连续偏导数.

证　易知曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3,\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1,\frac{1}{y_0}F_1-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right),$$

因此过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3\right)(x-x_0)+\left(\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1\right)(y-y_0)+\left(\frac{1}{y_0}F_1-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right)(z-z_0)=0,$$

容易验证，$(0,0,0)$ 满足上述方程，即所有切平面都经过原点.

15. 设 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且 $F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$. 进一步，设 k 为正整数，$F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数，即对于任意的实数 t 和 (x,y,z)，成立

$$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z).$$

证明：曲面 $F(x,y,z)=0$ 上所有点的切平面相交于一定点.

证　利用齐次条件对 t 求导，有

$$xF_x(tx,ty,tz)+yF_y(tx,ty,tz)+zF_z(tx,ty,tz)=kt^{k-1}F(x,y,z),$$

再令 $t=1$，得到曲面上的点 (x,y,z) 所满足的恒等式：

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z).$$

因为曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为

$$(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)),$$

于是过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

利用前面的恒等式，切平面方程化为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x+F_y(x_0,y_0,z_0)y+F_z(x_0,y_0,z_0)z=kF(x_0,y_0,z_0)=0,$$

显然切平面经过原点，所以原点就是所有切平面的交点.

§6 无条件极值

1. 讨论下列函数的极值：

(1) $f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$；

(2) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$；

(3) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$；

(4) $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^4)$；

(5) $f(x,y)=xy+\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}$，其中常数 $a>0,b>0$；

(6) $f(x,y,z)=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{2}{z}$ $(x,y,z>0)$.

解 (1) 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x=4x^3-4x=0, \\ f_y=8y^3-24y=0 \end{cases}$$

解得

$$x=0,\pm 1;y=0,\pm\sqrt{3},$$

即函数有 9 个驻点. 再由 $f_{xx}=4(3x^2-1),f_{xy}=0,f_{yy}=24(y^2-1)$，可知

$$H=96(3x^2-1)(y^2-1).$$

应用定理 12.6.2. 驻点 $(0,0),(1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3}),(-1,\sqrt{3}),(-1,-\sqrt{3})$ 满足 $H>0$，所以是极值点，而其余驻点不是极值点. 再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在 $(0,0)$ 点取极大值 6；在 $(1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3}),(-1,\sqrt{3}),(-1,-\sqrt{3})$ 四点取极小值 -13.

注 本题可使用配方法得到

$$f(x,y)=(x^2-1)^2+2(y^2-3)^2-13,$$

由此易知 $(1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3}),(-1,\sqrt{3}),(-1,-\sqrt{3})$ 四点为函数的最小值点，最小值为 -13，函数无最大值，$(0,0)$ 点为函数的极大值点，极大值为 6.

(2) 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0, \\ f_y=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$$

两式相减，可解得 $x=y=0,\pm 1$，即驻点为 $(0,0),(1,1),(-1,-1)$ 三点. 再由 $f_{xx}=12x^2-2,f_{xy}=-2,f_{yy}=12y^2-2$，可知

$$H=4(6x^2-1)(6y^2-1)-4.$$

应用定理 12.6.2. 驻点 $(1,1),(-1,-1)$ 满足 $H>0$，所以是极值点，再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在 $(1,1),(-1,-1)$ 两点取极小值 -2.

在 $(0,0)$ 点，有 $H=0$，且 $f(0,0)=0$. 由于 $f(x,x)=2x^2(x^2-2),f(x,-x)=2x^4$，可知函数在 $(0,0)$ 点附近变号，所以 $(0,0)$ 不是极值点.

(3) 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0, \\ f_y = 2y = 0, \\ f_z = -2z = 0 \end{cases}$$

解得(0,0,0)是唯一的驻点. 由$f(0,0,0)=0, f(x,y,0)=x^2+y^2, f(0,0,z)=-z^2$,可知函数在(0,0,0)点附近变号;即(0,0,0)不是极值点,所以函数无极值点.

注　对于二次多项式$f(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,它的 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是常数矩阵,我们有如下结论:

设$\boldsymbol{x}_0$为$f(\boldsymbol{x})$的驻点,则由$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$可知

(a) $f(\boldsymbol{x}_0)$为最小值的充分必要条件是 $\boldsymbol{H}$ 为半正定矩阵;

(b) $f(\boldsymbol{x}_0)$为最大值的充分必要条件是 $\boldsymbol{H}$ 为半负定矩阵;

(c) $f(\boldsymbol{x}_0)$不是极值的充分必要条件是 $\boldsymbol{H}$ 为不定矩阵.

本题由于函数$f(x,y,z)$的 Hesse 矩阵为不定矩阵,所以(0,0,0)不是$f(x,y,z)$的极值点.

(4) 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x = 2x(3x^4-2yx^2-y) = 0, \\ f_y = 2y - x^2 - x^4 = 0 \end{cases}$$

解得$x=y=0; x=\pm1, y=1; x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=\dfrac{3}{8}$,即驻点为(0,0),(1,1),(-1,1),$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8}\right)$和$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8}\right)$五点. 再由$f_{xx}=30x^4-12yx^2-2y, f_{xy}=-2x-4x^3, f_{yy}=2$,可知

$$H=2(30x^4-12yx^2-2y)-(2x+4x^3)^2.$$

应用定理 12.6.2. 驻点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8}\right)$,$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8}\right)$满足$H>0$,所以是极值点,再根据$f_{xx}$的符号,可知函数在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8}\right)$,$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3}{8}\right)$取极小值$-\dfrac{1}{64}$.

在(1,1),(-1,1)点$H<0$,所以(1,1),(-1,1)不是极值点.

在(0,0)点$H=0$,且$f(0,0)=0$. 由于$f(x,x^3)=-x^5(1-x)^2$,易知函数在(0,0)点附近变号,所以(0,0)不是极值点.

(5) 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x = y - \dfrac{a^3}{x^2} = 0, \\ f_y = x - \dfrac{b^3}{y^2} = 0 \end{cases}$$

解得$\left(\dfrac{a^2}{b},\dfrac{b^2}{a}\right)$是唯一的驻点. 再由$f_{xx}=\dfrac{2a^3}{x^3}, f_{xy}=1, f_{yy}=\dfrac{2b^3}{y^3}$,可知

$$H=\frac{4a^3b^3}{x^3y^3}-1.$$

应用定理 12.6.2. 由于在驻点$\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$有 $H>0$,再根据f_{xx}的符号,可知函数在$\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$点取极小值 $3ab$.

(6) 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x = 1-\frac{y}{x^2}=0, \\ f_y = \frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}=0, \\ f_z = \frac{1}{y}-\frac{2}{z^2}=0 \end{cases}$$

解得唯一的驻点$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$. 由于函数在$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$点的 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2^{\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -2^{-\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{4}} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

是正定的,所以函数在$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$取极小值 $4\cdot 2^{\frac{1}{4}}$.

2. 设$f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$,证明:函数$f$的最小值为 0.

证 先求驻点. 由

$$\begin{cases} f_x = 2x-2y+2z=0, \\ f_y = 6y-2x=0, \\ f_z = 4z+2x=0 \end{cases}$$

解得唯一驻点$(0,0,0)$,由于函数在$(0,0,0)$点的 Hesse 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$是正定的,所以函数在$(0,0,0)$点取极小值$f(0,0,0)=0$.

注 本题可使用配方法得到

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x-2y)^2+\frac{1}{2}(x+2z)^2+y^2,$$

由此可知函数在$(0,0,0)$点取最小值$f(0,0,0)=0$.

3. 证明:函数$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$有无穷多个极大值点,但无极小值点.

证 由

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -(1+e^y)\sin x=0, \\ f_y(x,y) = e^y\cos x-(1+y)e^y=0 \end{cases}$$

解得$x=k\pi, y=\cos k\pi-1$,所以驻点为

$$(k\pi,\cos k\pi-1), k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由$f_{xx}=-(1+e^y)\cos x, f_{xy}=-e^y\sin x, f_{yy}=e^y\cos x-(2+y)e^y$,可知在驻点$(k\pi,\cos k\pi-1)$处,

$$H=\cos k\pi(1+e^y)e^y,$$

所以当k为奇数时$H<0$,$(k\pi,\cos k\pi-1)$不是极值点;当k为偶数时$H>0$,再由$f_{xx}<$

0，可知$(k\pi,\cos k\pi-1)$是极大值点．所以函数有无穷多个极大值点，但无极小值点．

4. 求函数$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$在闭区域

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$$

上的最大值与最小值．

解　由

$$\begin{cases}f_x=\cos x-\cos(x+y)=0,\\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=0\end{cases}$$

得到$\cos x=\cos y=\cos(x+y)$．在$D^o=\{(x,y)\mid 0<x,y<x+y<2\pi\}$上考虑，得到$x=y=2\pi-x-y$，即$\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)$是函数在区域内部唯一的驻点．由于在区域边界上，即当$x=0$或$y=0$或$x+y=2\pi$时，有$f(x,y)=0$，而在区域内部唯一的驻点上取值为$f\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}>0$，根据闭区域上连续函数的性质，可知函数的最大值为$f_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，最小值为$f_{\min}=0$.

5. 在$[0,1]$上用怎样的直线$\xi=ax+b$来代替曲线$y=x^2$，才能使它为在平方误差的积分

$$J(a,b)=\int_0^1(y-\xi)^2\mathrm{d}x$$

极小意义下的最佳近似．

解　$$J(a,b)=\int_0^1(x^2-ax-b)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{5}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}(a^2-2b)+ab+b^2$$

是a,b的二次多项式，它的 Hesse 矩阵$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1\\1&2\end{pmatrix}$是正定的，所以有最小值（见第 1 题(3)的注）．对参数a,b求导，

$$\begin{cases}J_a=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}+b=0,\\ J_b=a+2b-\frac{2}{3}=0,\end{cases}$$

得到$a=1,b=-\frac{1}{6}$，即$\left(1,-\frac{1}{6}\right)$是唯一的驻点，所以必定是最小值点．因此最佳直线为$\xi=x-\frac{1}{6}$.

6. 在半径为R的圆上，求内接三角形的面积最大者．

解　设圆内接三角形的各边所对的圆心角为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则三角形的面积为

$$S=\frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3]=\frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2-\sin(\alpha_1+\alpha_2)],$$

由第 4 题知，$\alpha_1=\alpha_2=\frac{2\pi}{3}=\alpha_3$时三角形面积最大，这时圆内接三角形为正三角形，

$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

7. 要做一圆柱形帐幕,并给它加一个圆锥形的顶. 问:在体积为定值时,圆柱的半径 R,高 H 及圆锥的高 h 满足什么关系时,所用的布料最省?

解 由帐幕的体积 $V=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h$,得到 $H=\frac{V}{\pi R^2}-\frac{1}{3}h$,于是帐幕的表面积为

$$S=2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}=\frac{2V}{R}-\frac{2\pi Rh}{3}+\pi R\sqrt{R^2+h^2}.$$

对 R 与 h 求偏导数,得到

$$\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial h}=-\frac{2\pi R}{3}+\frac{\pi Rh}{\sqrt{R^2+h^2}}=0,\\ \frac{\partial S}{\partial R}=-\frac{2V}{R^2}-\frac{2\pi h}{3}+\pi\sqrt{R^2+h^2}+\frac{\pi R^2}{\sqrt{R^2+h^2}}=0.\end{cases}$$

由第一个方程,得到 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}h$,再将 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}h$ 与 $V=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h$ 代入第二个方程,得到 $H=\frac{1}{2}h$,所以当 $\frac{R}{\sqrt{5}}=\frac{H}{1}=\frac{h}{2}$ 时,布料最省.

8. 求由方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值.

解 由

$$y'=-\frac{x+y}{x+2y}=0$$

得到 $x+y=0$,再代入 $x^2+2xy+2y^2=1$ 得到 $y^2=1$,由此可知隐函数 $y=y(x)$ 的驻点为 $x=\pm1$,且当 $x=\pm1$ 时有 $y=\mp1$.

由于在驻点有

$$y''=-\frac{1+y'}{x+2y}+\frac{x+y}{(x+2y)^2}(1+2y')=-\frac{1}{y},$$

根据 $y''(\pm1)$ 的符号可知,$y=y(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 1,在 $x=1$ 取极小值 -1.

注 本题也可由

$$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=1,$$

得到 $-1\leqslant y\leqslant1$,由此可知 $y=y(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 1,在 $x=1$ 取极小值 -1.

9. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 由

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x}{1-2z-8y}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4(y+2z)}{1-2z-8y}=0,\end{cases}$$

得到 $x=0$ 与 $y+2z=0$,再代入 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$,得到 $7z^2+z-8=0$,即 $z=1,-\frac{8}{7}$. 由此可知隐函数 $z=z(x,y)$ 的驻点为 $(0,-2)$ 与 $\left(0,\frac{16}{7}\right)$.

由

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{1-2z-8y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4}{1-2z-8y},$$

可知在驻点$(0,-2)$与$\left(0,\frac{16}{7}\right)$有$H>0$.

在$(0,-2)$点，$z=1$，因此$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{15}>0$，所以$(0,-2)$为极小值点，极小值为$z=1$；在$\left(0,\frac{16}{7}\right)$点，$z=-\frac{8}{7}$，因此$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{15}<0$，所以$\left(0,\frac{16}{7}\right)$为极大值点，极大值为$z=-\frac{8}{7}$.

注 1　原方程可以改写为

$$2x^2+2(y+2z)^2=(z-1)(7z+8),$$

由左边非负可得$(z-1)(7z+8)\geqslant 0$，即$z\leqslant -\frac{8}{7}$或者$z\geqslant 1$.

注 2　在三维空间中，方程的图像是双叶双曲面，由两个不相连的部分组成．其中之一开口向上，最小值$z=1$，另一个开口向下，最大值$z=-\frac{8}{7}$.

10. 在Oxy平面上求一点，使它到三直线$x=0$，$y=0$和$x+2y-16=0$的距离的平方和最小.

解　平面上点(x,y)到三直线的距离平方和为

$$D(x,y)=x^2+y^2+\left(\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

对x,y求偏导数，

$$\begin{cases}D_x=2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)=0,\\ D_y=2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)=0,\end{cases}$$

得到$x=\frac{8}{5}$，$y=\frac{16}{5}$，所以函数只有一个驻点$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

由于

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty}D(x,y)=+\infty,$$

可知函数$D(x,y)$在驻点$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$有最小值.

11. 证明：圆的所有外切三角形中，以正三角形的面积为最小.

证　设圆半径为 1，外切三角形的两个顶角为2α与2β，则三角形的面积为

$$S=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cot\alpha+\cot\beta+\tan(\alpha+\beta).$$

由

$$\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial\alpha}=-\csc^2\alpha+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\\ \frac{\partial S}{\partial\beta}=-\csc^2\beta+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\end{cases}$$

得到$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$，所以

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{6},$$

即外切正三角形的面积为最小.

12. 证明:圆的所有内接 n 边形中,以正 n 边形的面积为最大.

证 设圆半径为 1,圆内接 n 边形的各边所对的圆心角为 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$,则 n 边形的面积为

$$S=\frac{1}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{n-1}-\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})].$$

由

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}=\frac{1}{2}[\cos\alpha_k-\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]=0,k=1,2,\cdots,n-1,$$

推出

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}),$$

所以

$$\alpha_k=\frac{2\pi}{n},k=1,2,\cdots,n,$$

即内接正 n 边形的面积为最大.

13. 证明:当 $0<x<1,0<y<+\infty$ 时,成立不等式

$$yx^y(1-x)<e^{-1}.$$

证 令 $f(x,y)=yx^y(1-x)$,对 y 求偏导,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0,$$

解得 $y=\frac{-1}{\ln x}$. 对固定的 $x\in(0,1)$,根据 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $y=\frac{-1}{\ln x}$ 附近的符号变化,可知 $f(x,y)$(作为 y 的函数)的极大值点为 $y=\frac{-1}{\ln x}$,极大值为 $\varphi(x)=\frac{-(1-x)}{e\ln x}$. 再对 $\varphi(x)$ 求导,得到

$$\varphi'(x)=\frac{1}{ex\ln^2 x}(1-x+x\ln x).$$

记

$$g(x)=1-x+x\ln x,x\in(0,1),$$

则 $g'(x)=\ln x<0,g(0+)=1,g(1-)=0$,所以 $g(x)>0$,于是 $\varphi(x)$ 严格单调增加. 再由 $\lim\limits_{x\to1-}\varphi(x)=e^{-1}$,得到

$$f(x,y)\leqslant\varphi(x)<e^{-1}\quad(0<x<1,0<y<+\infty).$$

14. 某养殖场饲养两种鱼,若甲种鱼放养 x(万尾),乙种鱼放养 y(万尾),收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x\quad\text{和}\quad(4-\beta x-2\alpha y)y\quad(\alpha>\beta>0).$$

求使产鱼总量最大的放养数.

解 鱼总产量为

$$P=(3-\alpha x-\beta y)x+(4-\beta x-2\alpha y)y=-\alpha x^2-2\beta xy-2\alpha y^2+3x+4y.$$

对 x,y 求偏导数,

$$\begin{cases} P_x = -2\alpha x - 2\beta y + 3 = 0, \\ P_y = -2\beta x - 4\alpha y + 4 = 0, \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2}, y = \frac{4\alpha - 3\beta}{4\alpha^2 - 2\beta^2}.$$

因为 $P = -\alpha x^2 - 2\beta xy - 2\alpha y^2 + 3x + 4y$ 是二次多项式，由

$$H = (-2\alpha)(-4\alpha) - (2\beta)^2 = 4(2\alpha^2 - \beta^2) > 0, P_{xx} = -2\alpha < 0,$$

可知其 Hesse 矩阵是负定的，所以函数有最大值，即当 $x = \frac{3\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 - \beta^2}, y = \frac{4\alpha - 3\beta}{4\alpha^2 - 2\beta^2}$ 时产鱼总量最大.

计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 某种机器零件的加工需经两道工序，x 表示零件在第一道工序中出现的疵点数（疵点指气泡、砂眼、裂痕等），y 表示在第二道工序中出现的疵点数. 某日测得 8 个零件的 x 与 y 如下：

x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式 $y = ax + b$，并画出拟合曲线.

解　程序代码为

```
hold off
x = [0,1,3,6,8,5,4,2];
y = [1,2,2,4,4,3,3,2];
plot(x,y,'b *')
hold on
A = [x',ones(size(x'))];
B = y';
x1 = A\B;
a = x1(1);b = x1(2);y = a * x + b;
plot(x,y,'r')
string = ['拟合直线 y =',num2str(a),'* x +',num2str(b)];
text(0.5,3.5,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $y = 0.378\,45x + 1.253\,1$. 图形如图 12.6.1 所示.

2. 某品种大豆的脂肪含量 x(%) 与蛋白质含量 y(%) 的测定结果如下表所示：

x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式，并画出拟合曲线.

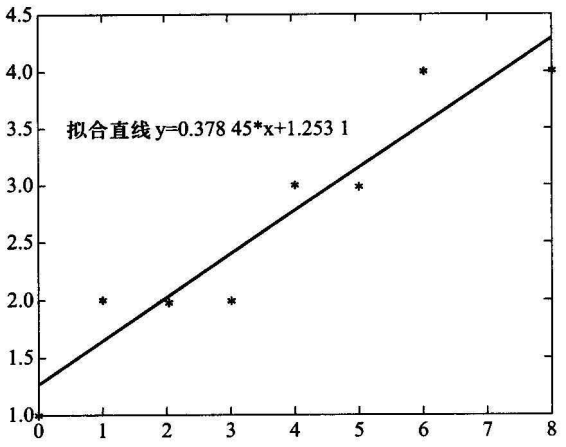


图 12.6.1

解 程序代码为

```
hold off
x = [16.5,17.5,18.5,19.5,20.5,21.5,22.5,23.5,24.5];
y = [43.5,42.6,41.8,40.6,40.3,38.7,37.2,36.0,34.0];
plot(x,y,'b *')
hold on
A = [x',ones(size(x'))];
B = y';
x1 = A\B;
a = x1(1);b = x1(2);y = a * x + b;
plot(x,y,'r')
str = ['拟合直线 y =',num2str(a),'* x +',num2str(b)];
text(18,44,str,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $y = -1.148\ 3x + 62.951\ 9$. 图形如图 12.6.2 所示.

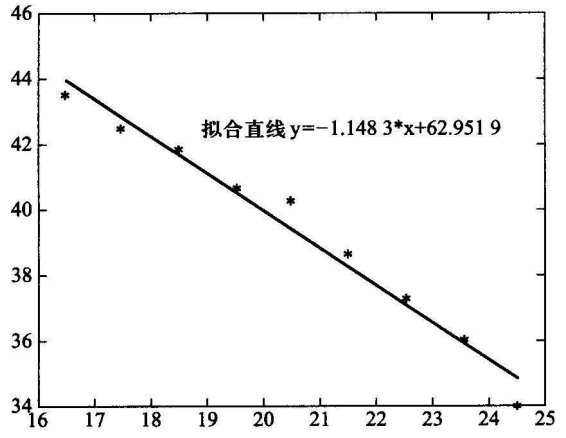


图 12.6.2

3. 某种产品加工前的含水率(%)与加工后含水率(%)的测试结果如下表：

测试编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率 x_i	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后的含水率 y_i	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系.

解　程序代码为

```
hold off
x = [16.7,18.2,18.0,17.9,17.4,16.6,17.2,17.7,15.7,17.1];
y = [17.5,18.7,18.6,18.5,18.2,17.5,18.0,18.2,16.9,17.8];
plot(x,y,'b *')
hold on
A = [x',ones(size(x'))];
B = y';
x1 = A\B;
a = x1(1);b = x1(2);y = a * x + b;
plot(x,y,'r')
str = ['拟合直线 y =',num2str(a),'* x +',num2str(b)];
text(15.6,18.5,str,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $y = 0.739\ 79x + 5.228\ 6$. 图形如图 12.6.3 所示.

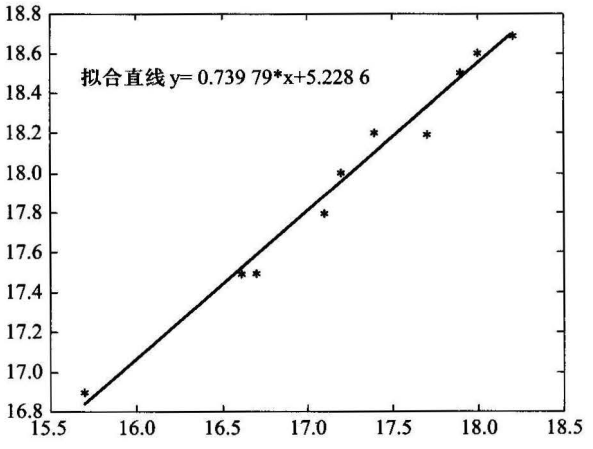


图 12.6.3

4. 盛钢水的钢包，在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀，容积会不断增大. 在生产过程中，积累了使用次数与钢包容积增大量之间的以下 16 组数据. 画出这些数据的散点图，找出使用次数 x 与钢包容积增大量 y 之间的关系，并画出拟合曲线.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

(**提示**:假设 $y = ax^2 + bx + c$.)

解 程序代码为

```
hold off
x = 2:17;
y = [6.42, 8.20, 9.58, 9.50, 9.70, 10.00, 9.93, 9.99, 10.50, 10.59, 10.60, 10.63,
10.60,10.90,10.76,10.80];
plot(x,y,'b *')
A = [x.^2',x',ones(size(x))'];
a = A\y'
hold on
y = a(1) * x.^2 + a(2) * x + a(3)
plot(x,y,'r')
string = ['拟合曲线 y =',num2str(a(1)),' * x^2 +',num2str(a(2)),' * x +',num2str(a
(3))];
text(5,8,string)
```

运行后,得拟合曲线 $y = -0.025\,746x^2 + 0.688\,29x + 6.250\,7$,图形如图 12.6.4 所示.

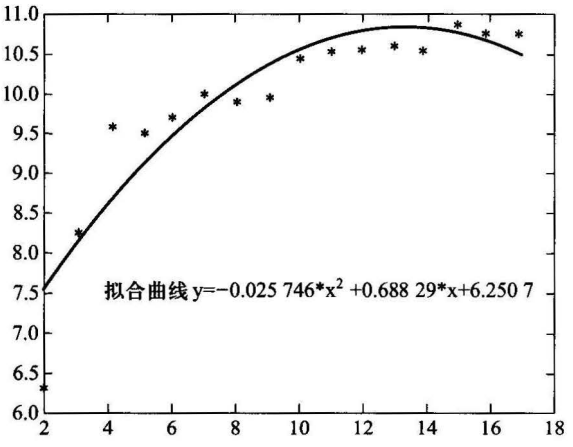


图 12.6.4

5. 在研究化学反应速度时,得到下列数据. 找出实验开始后的时间 t 与反应物的量 m 之间的关系,并画出拟合曲线.

t	3	6	9	12	15	18	21	24
m	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

(**提示**: m 与 t 的关系为 $m = ae^{bt}$.)

解　程序代码为

```
hold off
x = 3:3:24;
y = [57.6,41.5,31.2,22.9,15.4,12.1,8.9,6.4];
plot(x,y,'b *')
hold on
y1 = log(y);
A = [x',ones(size(x))'];
a = A\y1';
y = exp(a(2)) * exp(a(1) * x);
plot(x,y,'r')
string = ['拟合曲线 m =',num2str(exp(a(2))),'* e^{',num2str(a(1)),'* t}'];
text(8,28,string,'FontSize',16)
```

运行后，得拟合曲线 $m = 78.448e^{-0.104\,43t}$，图形如图 12.6.5 所示.

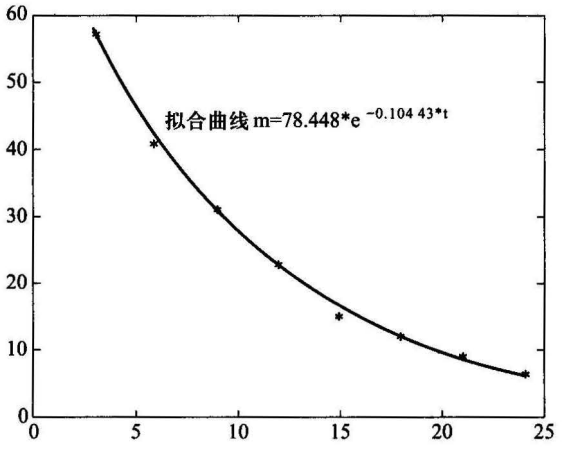


图 12.6.5

§7　条件极值问题与 Lagrange 乘数法

1. 求下列函数的条件极值：

(1) $f(x,y) = xy$，约束条件为 $x + y = 1$；

(2) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$，约束条件为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$；

(3) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$，约束条件为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ Ax + By + Cz = 0, \end{cases}$ 其中 $a > b > c > 0, A^2 + B^2 + C^2 = 1$.

解　(1) 令

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x + y - 1),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases} L_x = y - \lambda = 0, \\ L_y = x - \lambda = 0, \\ L_\lambda = -(x + y - 1) = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = \frac{1}{2}$,即目标函数只有一个驻点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

由 $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,可知 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 是目标函数的条件极大值点,也是条件最大值点,条件最大值为 $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

(2) 令

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases} L_x = 1 - 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2 - 2\lambda y = 0, \\ L_z = 2 - 2\lambda z = 0, \\ L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

由前三式得到 $y = -z = -2x$,代入约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,解得

$$(x, y, z) = \pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集,目标函数连续,所以必有最大值和最小值.由于目标函数的驻点为 $\pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,对应的目标函数值为 ± 3,所以 $f_{\max} = f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3$, $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3$.

(3) 令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(Ax + By + Cz),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases} L_x = \frac{2x}{a^2} - 2\lambda x - \mu A = 0, \\ L_y = \frac{2y}{b^2} - 2\lambda y - \mu B = 0, \\ L_z = \frac{2z}{c^2} - 2\lambda z - \mu C = 0, \\ L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \\ L_\mu = -(Ax + By + Cz) = 0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}(xL_x + yL_y + zL_z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda = 0.$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集,目标函数连续,所以必有最大值和最小值.

由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中.

由

$$AL_x + BL_y + CL_z = 2\left(\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2}\right) - \mu(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

得到

$$\mu = \frac{2}{A^2 + B^2 + C^2}\left(\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2}\right) = 2\left(\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2}\right),$$

代入上面的方程组,得到

$$\begin{cases} \dfrac{L_x}{2} = \left(\dfrac{1 - A^2}{a^2} - \lambda\right)x - \dfrac{AB}{b^2}y - \dfrac{AC}{c^2}z = 0, \\ \dfrac{L_y}{2} = -\dfrac{AB}{a^2}x + \left(\dfrac{1 - B^2}{b^2} - \lambda\right)y - \dfrac{BC}{c^2}z = 0, \\ \dfrac{L_z}{2} = -\dfrac{AC}{a^2}x - \dfrac{BC}{b^2}y + \left(\dfrac{1 - C^2}{c^2} - \lambda\right)z = 0. \end{cases}$$

由约束条件可知驻点不在原点,即上面方程组有非零解,所以其系数行列式为零. 经计算得到

$$-\lambda\left[\lambda^2 + \left(\frac{A^2 - 1}{a^2} + \frac{B^2 - 1}{b^2} + \frac{C^2 - 1}{c^2}\right)\lambda + \left(\frac{A^2}{b^2c^2} + \frac{B^2}{c^2a^2} + \frac{C^2}{a^2b^2}\right)\right] = 0,$$

显然目标函数的最大值与最小值不为零,即 $\lambda \neq 0$,所以 f 的最大值与最小值分别为方程

$$\lambda^2 + \left(\frac{A^2 - 1}{a^2} + \frac{B^2 - 1}{b^2} + \frac{C^2 - 1}{c^2}\right)\lambda + \left(\frac{A^2}{b^2c^2} + \frac{B^2}{c^2a^2} + \frac{C^2}{a^2b^2}\right) = 0$$

的两个根.

2. 在周长为 $2p$ 的一切三角形中,找出面积最大的三角形.

解　记三角形的边长为 a,b,c,面积为 S,则 $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. 令

$$L(a,b,c,\lambda) = p(p-a)(p-b)(p-c) - \lambda(a + b + c - 2p),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases} L_a = -p(p-b)(p-c) - \lambda = 0, \\ L_b = -p(p-a)(p-c) - \lambda = 0, \\ L_c = -p(p-a)(p-b) - \lambda = 0, \end{cases}$$

于是

$$p - a = p - b = p - c,$$

再根据约束条件得到

$$a = b = c = \frac{2}{3}p,$$

所以面积最大的三角形为正三角形,最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

3. 要做一个容积为 1 m^3 的有盖铝圆桶,什么样的尺寸才能使用料最省?

解　假设圆桶的底面半径为 r,高为 h,则圆桶的容积为 $\pi r^2 h = 1$,表面积为 $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. 令

$$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-1),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases}L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0,\\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0,\end{cases}$$

解得 $h=2r$,再代入约束条件 $\pi r^2h=1$,得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}},h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$

根据题意,目标函数必有最小值,所以可知当底面半径为$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$,高为$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$时用料最省.

4. 抛物面 $z=x^2+y^2$被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离.

解 设原点到椭圆上一点的距离为 $d(x,y,z)$,则 $d^2=x^2+y^2+z^2$. 令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2+y^2-z)-\mu(x+y+z-1),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2x-2\lambda x-\mu=0,\\ L_y=2y-2\lambda y-\mu=0,\\ L_z=2z+\lambda-\mu=0,\end{cases}$$

将前两式相减,得到$(\lambda-1)(x-y)=0$.

若 $\lambda=1$,则有 $\mu=0$,$z=-\frac{1}{2}$,显然不满足约束条件.

若 $\lambda\neq1$,则 $x=y$,再联立约束条件 $z=x^2+y^2$与 $x+y+z=1$,可解出 $x=y=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3})$,$z=2x^2=2\mp\sqrt{3}$,从而有 $d^2=9\mp5\sqrt{3}$.

由于满足约束条件的点集是连通紧集,目标函数连续,所以必有最大值和最小值.于是得到

$$d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}},d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

5. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形,其底边平行于椭圆的长轴,而使面积最大.

解 设(x,y),$x\geqslant0$ 为三角形底边上的顶点,则三角形面积为 $S=x(2-y)$,令

$$L(x,y,\lambda)=x(2-y)-\lambda(x^2+3y^2-12),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2-y-2\lambda x=0,\\ L_y=-x-6\lambda y=0,\end{cases}$$

消去 λ,可得 $6y-3y^2+x^2=0$,再联立约束条件 $x^2+3y^2=12$,可得满足 $x\geqslant0$ 的驻点只有$(0,2)$和$(3,-1)$.

当$(x,y)=(0,2)$时 $S=0$,当$(x,y)=(3,-1)$时 $S=9$. 由题意三角形面积一定存在最大值,于是得到

$$S_{\max}=9.$$

6. 求空间一点(a,b,c)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离.

解　设(x,y,z)为平面上的一点,它与点(a,b,c)之间的距离为$d(x,y,z)$,则$d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$,令

$$L(x,y,z,\lambda)=d^2(x,y,z)-\lambda(Ax+By+Cz+D),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases}L_x=2(x-a)-A\lambda=0,\\ L_y=2(y-b)-B\lambda=0,\\ L_z=2(z-c)-C\lambda=0,\end{cases}$$

解得

$$x=a+\frac{1}{2}\lambda A,y=b+\frac{1}{2}\lambda B,z=c+\frac{1}{2}\lambda C,$$

代入约束条件$Ax+By+Cz+D=0$,得到

$$\frac{\lambda}{2}=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}.$$

于是

$$d^2=\left(\frac{\lambda A}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda B}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda C}{2}\right)^2=\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2},$$

所以(a,b,c)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$d=\frac{|aA+bB+cC+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7. 求平面$Ax+By+Cz=0$与柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相交所成的椭圆的面积($A,B,C$都不为零;$a,b$为正数).

解　椭圆的中心在原点,原点到椭圆周上点(x,y,z)的距离d的最大值和最小值分别为椭圆的长半轴和短半轴. 令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\mu(Ax+By+Cz),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2x-\dfrac{2\lambda x}{a^2}-\mu A=0,\\ L_y=2y-\dfrac{2\lambda y}{b^2}-\mu B=0,\\ L_z=2z-\mu C=0,\\ L_\lambda=-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=0,\\ L_\mu=-(Ax+By+Cz)=0,\end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}(xL_x+yL_y+zL_z)=x^2+y^2+z^2-\lambda=0.$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集,目标函数连续,所以必有最大值和最小值.

由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中. 以 $\mu=\frac{2z}{C}=-2\frac{Ax+By}{C^2}$ 代入前两个方程,可得

$$\begin{cases}\frac{L_x}{2}=\left(1-\frac{\lambda}{a^2}+\frac{A^2}{C^2}\right)x+\frac{AB}{C^2}y=0,\\ \frac{L_y}{2}=\frac{AB}{C^2}x+\left(1-\frac{\lambda}{b^2}+\frac{B^2}{C^2}\right)y=0,\end{cases}$$

此方程组有非零解,所以系数行列式为 0. 因此

$$\left(1-\frac{\lambda}{a^2}+\frac{A^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{b^2}+\frac{B^2}{C^2}\right)-\frac{A^2B^2}{C^4}=0,$$

即

$$A^2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)+B^2\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)+C^2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)=0.$$

这个二次方程的两个根 λ_1 与 λ_2 就是椭圆的长半轴和短半轴的平方,因此椭圆面积为 $S=\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$,利用多项式根与系数的关系可得

$$\lambda_1\lambda_2=(A^2+B^2+C^2)\frac{a^2b^2}{C^2},$$

所以

$$S=\frac{\pi ab}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

8. 求 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在条件 $x+y=a$ 下的最小值,其中 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,a$ 为常数. 并证明不等式

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^4.$$

解 令

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^4+y^4)-\lambda(x+y-a),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2x^3-\lambda=0,\\ L_y=2y^3-\lambda=0,\\ L_\lambda=-(x+y-a)=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=\frac{a}{2}$.

由于连续函数 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在线段 $\{(x,y)\mid x+y=a,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$ 的两个端点 $(0,a),(a,0)$ 上的函数值有 $f(0,a)=f(a,0)=\frac{1}{2}a^4>f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{16}a^4$,所以 $f_{\min}=f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{16}a^4$. 因此

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geqslant\frac{1}{16}a^4=\left(\frac{a}{2}\right)^4=\left(\frac{x+y}{2}\right)^4.$$

9. 当 $x>0,y>0,z>0$ 时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值．并由此证明：当 a,b,c 为正实数时，成立不等式

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

解　令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{1}{x}-2x\lambda=0,\\ L_y=\dfrac{2}{y}-2y\lambda=0,\\ L_z=\dfrac{3}{z}-2z\lambda=0,\end{cases}$$

解得 $2\lambda=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{y^2}=\dfrac{3}{z^2}$，代入约束条件 $x^2+y^2+z^2=6R^2$，可得

$$x^2=R^2,y^2=2R^2,z^2=3R^2.$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点．于是得到

$$\ln x+2\ln y+3\ln z\leqslant\ln[\sqrt{R^2}(2R^2)(3R^2)^{\frac{3}{2}}]=\ln(6\sqrt{3}R^6),$$

即

$$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3.$$

由前一式得到

$$f_{\max}=f(R,\sqrt{2}R,\sqrt{3}R)=\ln(6\sqrt{3}R^6).$$

在后一式中令 $a=x^2,b=y^2$ 和 $c=z^2$，得到

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

10. (1) 求函数 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c(x>0,y>0,z>0)$ 在约束条件 $x^k+y^k+z^k=1$ 下的极大值，其中 k,a,b,c 均为正常数；

(2) 利用(1)的结果证明：对于任何正数 u,v,w，成立不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

解　(1) 令

$$L(x,y,z,\lambda)=a\ln x+b\ln y+c\ln z-\lambda(x^k+y^k+z^k-1),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{a}{x} - k\lambda x^{k-1} = 0, \\ L_y = \dfrac{b}{y} - k\lambda y^{k-1} = 0, \\ L_z = \dfrac{c}{z} - k\lambda z^{k-1} = 0, \end{cases}$$

解得 $k\lambda = \dfrac{a}{x^k} = \dfrac{b}{y^k} = \dfrac{c}{z^k}$，代入约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$，得到 $\dfrac{a+b+c}{k\lambda} = 1$，所以

$$x^k = \frac{a}{a+b+c}, y^k = \frac{b}{a+b+c}, z^k = \frac{c}{a+b+c}.$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点．于是

$$a\ln x + b\ln y + c\ln z = \ln(x^a y^b z^c) \leqslant \ln\left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}},$$

即得到

$$x^a y^b z^c \leqslant \left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}.$$

(2) 令 $k=1, x = \dfrac{u}{u+v+w}, y = \dfrac{v}{u+v+w}, z = \dfrac{w}{u+v+w}$，则 $x+y+z=1$，且

$$x^a y^b z^c = \left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a \left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b \left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c = \frac{u^a v^b w^c}{(u+v+w)^{a+b+c}}.$$

利用(1)的结果，有

$$x^a y^b z^c \leqslant \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

整理后得到

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leqslant \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

11. 求 a, b 之值，使得椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 包含圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$，且面积最小．

解 为了使椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 既包含圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$，又面积最小，可以要求圆心 $(1,0)$ 到椭圆周上的点的最短距离为 1．为此先考虑目标函数 $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ 在 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 条件下的极小值问题，并设条件极小值为 $g_{\min} = 1$，由此导出 a, b 之间的关系．构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}L_x=(x-1)-\dfrac{\lambda x}{a^2}=0,\\ \dfrac{1}{2}L_y=y-\dfrac{\lambda y}{b^2}=y\left(1-\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0,\\ L_\lambda=-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=0,\end{cases}$$

并由此可得

$$g_{\min}=(x-1)^2+y^2=\lambda\left(1-\frac{x}{a^2}\right)=1.$$

若 $y=0$，则 $x=a$. 由 $g_{\min}=(x-1)^2+y^2=1$，可得 $a=2$. 在方程组 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 中消去 y，得到 $\left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)x^2-2x+b^2=0$，容易知道当 $b<\sqrt{2}$ 时，方程除了解 $x_1=2$ 外另有一解 $x_2\in(0,2)$，这说明椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 不完全包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$，不满足条件. 所以 $b\geqslant\sqrt{2}$，这时椭圆面积 $S\geqslant 2\sqrt{2}\pi$.

若 $\lambda=b^2$，则 $x=\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$，代入 $g_{\min}=\lambda\left(1-\dfrac{x}{a^2}\right)=1$，得到 a,b 必须满足的关系式

$$a^2b^2=a^2+b^4.$$

现求目标函数 $f(a,b)=\pi ab$ 在 $a^2b^2=a^2+b^4$ 条件下的极小值. 令

$$l(a,b,\lambda)=\pi ab-\lambda(a^2b^2-a^2-b^4),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}l_a=\pi b-2\lambda a(b^2-1)=0,\\ l_b=\pi a-2\lambda b(a^2-2b^2)=0,\end{cases}$$

消去 λ，得到 $a=\sqrt{2}b^2$，再代入关于 a,b 的约束条件 $a^2b^2=a^2+b^4$，解得

$$a=\frac{3\sqrt{2}}{2},b=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

这时椭圆面积 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. 由于 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi<2\sqrt{2}\pi$，所以当 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$，且面积最小.

12. 设三角形 ABC 的三个顶点分别在三条光滑曲线 $f(x,y)=0,g(x,y)=0$ 及 $h(x,y)=0$ 上. 证明：若三角形 ABC 的面积取极大值，则各曲线分别在三个顶点处的法线必通过三角形 ABC 的垂心.

证　不妨固定一边 BC 于 x 轴上，A 点在曲线 $f(x,y)=0$ 上移动，设 $y=y(x)$ 是 $f(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则 $y(x)$ 就是三角形的高，当三角形 ABC 的面积取极大值时，$\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=0$，即曲线 $f(x,y)=0$ 在 A 点的切线与对边 BC 平行，所以在 A 点的法线与 BC 边垂直. 由于这是图形的几何性质，不依赖于坐标系，所以曲线 $f(x,y)=0,g(x,y)=0$ 与 $h(x,y)=0$ 在三个顶点处的切线分别平行于三角形的对边，从而在三个顶点处的

法线分别垂直于三角形的对边.

13. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个已知正数. 求 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

在约束条件

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\leqslant 1$$

下的最大值与最小值.

解 由于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$ 上没有驻点,所以只需要求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值与最小值. 令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1),$$

求偏导数,得到

$$L_{x_k}=a_k-2\lambda x_k=0,k=1,2,\cdots,n,$$

所以

$$x_k=\frac{a_k}{2\lambda},k=1,2,\cdots,n,$$

代入约束条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,可得 $2\lambda=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}$,于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}}=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2},$$

从而

$$f_{\max}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2},f_{\min}=-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}.$$

14. 求二次型 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 在 n 维单位球面 $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\;\middle|\;\sum_{k=1}^{n}x_k^2=1\right\}$ 上的最大值与最小值.

解 令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}L_{x_k}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i-\lambda x_k=0,k=1,2,\cdots,n,\\ L_\lambda=-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)=0,\end{cases}$$

由

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_kL_{x_k}=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k^2=0,$$

可知

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \lambda,$$

即目标函数的最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中.

记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，由于方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}x_i - \lambda x_k = 0 (k=1,2,\cdots,n)$ 有非零解，所以系数行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=0$，即 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值. 由于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是实对称矩阵，所以特征值都是实数，将它们按照大小排序为 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，则得到

$$f_{\max}=\lambda_n, f_{\min}=\lambda_1.$$

15. 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量. 若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α,β 为正的常数，且 $\alpha+\beta=1$. 假定两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小.

解　目标函数为 $f(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$，约束条件为 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$. 令

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2-\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}-12),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_{x_1}=p_1-2\alpha\lambda x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}=0, \\ L_{x_2}=p_2-2(1-\alpha)\lambda x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}=0, \end{cases}$$

消去 λ，得到 $x_2=\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}x_1$，代入约束条件 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$，可解得

$$x_1=\frac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}}, x_2=\frac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to\infty} f(x_1,x_2)=+\infty$，所以目标函数的唯一驻点必是最小值点，即当 $x_1=\dfrac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}}, x_2=\dfrac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}$ 时投入总费用最小.

第十三章 重积分

§1 有界闭区域上的重积分

1. 设一平面薄板(不计其厚度),它在 xy 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 D. 如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表示该薄板上的全部电荷.

解 设电荷总量为 Q,则

$$Q=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $D=[0,\pi]\times[0,1]$ 上有界,而且除了曲线段 $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ 外,$f(x,y)$ 在 D 上其他点连续. 证明 f 在 D 上可积.

证 设 $|f(x,y)|\leqslant M,(x,y)\in D$,将 D 用平行于两坐标轴的直线分成 n 个小区域 $\Delta D_i(i=1,2,\cdots,n)$,记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{diam}\Delta D_i\}$,不妨设 $\Delta D_i(i=1,2,\cdots,k)$ 将曲线段 $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$ 包含在内,于是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上连续,因此 $f(x,y)$ 在 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上可积,即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$,当 $\lambda<\delta_1$ 时,

$$\sum_{i=k+1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而当 $\lambda<\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{4kM}}$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta\sigma_i<2M\sum_{i=1}^{k}\Delta\sigma_i<2kM\lambda^2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\left(\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{4kM}\right)$,当 $\lambda<\delta$ 时,就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 f 在 D 上可积.

3. 按定义计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

解　将 D 分成 n^2 个小正方形

$$\Delta D_{ij}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{i}{n},\frac{j-1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{j}{n}\right\}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

取 $\xi_i=\dfrac{i}{n},\eta_j=\dfrac{j}{n}$，则

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j\Delta\sigma_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j=1}^{n}ij\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

4. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$D=[a,b]\times[c,d]$. 定义二元函数

$$F(x,y)=f(x),(x,y)\in D.$$

证明 $F(x,y)$ 在 D 上可积.

证　将 $[a,b]$，$[c,d]$ 分别作划分：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

和

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{m-1}<y_m=d,$$

则 D 分成了 nm 个小矩形 $\Delta D_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$.

记 ω_i 是 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\omega_{ij}(F)$ 是 F 在 ΔD_{ij} 上的振幅，则

$$\omega_{ij}(F)=\omega_i,$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\Delta y_j=(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i,$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to0(\lambda\to0)$，所以

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij}=\lim_{\lambda\to0}\Big\{(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\Big\}=0,$$

即 $F(x,y)$ 在 D 上可积.

5. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上的零边界闭区域，二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 D 上可积.

证明

$$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

和

$$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$$

也在 D 上可积.

证　首先我们有

$$H(x,y)=\frac{1}{2}(f(x,y)+g(x,y)+|f(x,y)-g(x,y)|),$$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}(f(x,y)+g(x,y)-|f(x,y)-g(x,y)|).$$

设 $\varphi(x,y)=|f(x,y)-g(x,y)|$，将 D 划分成 n 个小区域 $\Delta D_i(i=1,2,\cdots,n)$，利用不等式 $||a-b|-|c-d||\leqslant|(a-b)-(c-d)|\leqslant|a-c|+|b-d|$，可得

$$\omega_i(\varphi) \leqslant \omega_i(f) + \omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\omega_i(H) \leqslant \omega_i(f) + \omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(H)\Delta\sigma_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta\sigma_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta\sigma_i,$$

由 f,g 在 D 上可积,可知

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(H)\Delta\sigma_i = 0,$$

即 $H(x,y) = \max\{f(x,y),g(x,y)\}$ 在 D 上可积.

类似地可得

$$\omega_i(h) \leqslant \omega_i(f) + \omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

从而 $h(x,y) = \min\{f(x,y),g(x,y)\}$ 在 D 上也可积.

§2 重积分的性质与计算

1. 证明重积分的性质 8.

证 不妨设 $g(x) \geqslant 0$,M,m 分别是 $f(x)$ 在区域 Ω 上的上确界、下确界,由 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$、性质 1 和性质 3,可得

$$m\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V \leqslant \int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V \leqslant M\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V,$$

当 $\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V = 0$,积分中值定理显然成立. 当 $\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V \neq 0$,则

$$m \leqslant \frac{\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V}{\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V} \leqslant M,$$

所以存在 $\mu \in [m,M]$,使得

$$\frac{\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V}{\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V} = \mu,$$

即

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V = \mu\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V.$$

如果 f 在有界闭区域 Ω 上连续,由介值定理,存在 $\xi \in \Omega$,使得 $f(\xi) = \mu$,所以

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V = f(\xi)\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V.$$

2. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 x 轴，y 轴与直线 $x+y=1$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭矩形 $[3,5]\times[0,1]$.

解　(1) 因为在 D 上成立 $0<x+y<1$，所以 $(x+y)^2>(x+y)^3$，于是

$$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y > \iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 因为在 D 上成立 $x+y\geqslant 3$，所以 $\ln(x+y)<[\ln(x+y)]^2$，于是

$$\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 用重积分的性质估计下列重积分的值：

(1) $\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，其中 D 为区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 10\}$；

(3) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2+z^2}$，其中 Ω 为单位球 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

解　(1) 因为在 D 上成立 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$，所以

$$0\leqslant \iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2.$$

(2) 因为在 D 上成立 $\dfrac{1}{102}\leqslant\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant\dfrac{1}{100}$，所以

$$\frac{100}{51}\leqslant \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant 2.$$

(3) 因为在 Ω 上成立 $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\leqslant 1$，所以

$$\frac{2}{3}\pi\leqslant \iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{4}{3}\pi.$$

4. 计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$；

(3) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^3}$，其中 Ω 为长方体 $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$.

解　(1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\mathrm{d}y = 1.$$

(2) $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b xe^{x^2}\mathrm{d}x\int_c^d ye^{y^2}\mathrm{d}y = \dfrac{1}{4}(e^{b^2}-e^{a^2})(e^{d^2}-e^{c^2})$.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^3}=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^2\frac{\mathrm{d}z}{(x+y+z)^3}$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y+2)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}.$$

5. 在下列积分中改变累次积分的次序：

(1) $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y\quad(a<b)$；

(2) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y\quad(a>0)$；

(3) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$(改成按 y 方向、x 方向、z 方向的次序积分)；

(6) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$(改成按 x 方向、y 方向、z 方向的次序积分).

解 (1) $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x+$$

$$\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$

(5) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

注 也可写成

$$\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

(6) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_{0}^{1}\mathrm{d}z\int_{-z}^{z}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}x.$

6. 计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}(a>0)$，其中 D 为圆心在 (a,a)，半径为 a 并且和坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为直线 $y=x,y=x+a,y=a$ 和 $y=3a(a>0)$ 所围的区域；

(5) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围的区域；

(6) $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为直线 $y=x,y=-1$ 和 $x=1$ 所围的区域；

(7) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x\}$；

(8) $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为曲面 $z=xy$，平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围的区域；

(9) $\iiint\limits_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体；

(10) $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围的区域；

(11) $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$ 的公共部分；

(12) $\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 (1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-p}^{p}y^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_{-p}^{p}y^2\left(p^2-\frac{y^4}{p^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{21}p^5.$

(2) $$\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y=\int_0^a\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}.$$

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_a^{3a}\left(2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3\right)\mathrm{d}y = 14a^4.$$

(5) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)} y\mathrm{d}y = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t = \frac{5\pi}{2}a^3.$

(6) $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_y^1[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^{1}\left[y - y^2 + \frac{1}{2}y(\mathrm{e}^{\frac{y^2+1}{2}} - \mathrm{e}^{y^2})\right]\mathrm{d}y$$

$$= -\int_{-1}^{1}y^2\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}.$$

(7) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}y\mathrm{d}y = \int_1^2 x^2(x^2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{49}{20}.$

(8) $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy}z^3\mathrm{d}z$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^6\mathrm{d}y = \frac{1}{364}.$$

(9) $\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} - \frac{1-x}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

(10) $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_0^h z^2\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi h^3.$

(11) $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \pi\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z + \pi\int_{\frac{R}{2}}^R z^2(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5.$$

(12) $\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{\Omega_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \pi bc\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

7. 设平面薄片所占的区域是由直线 $x+y=2$，$y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求这个薄片的质量.

解 设薄片的质量为 m，则

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2+y^2)\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - 4y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3\right)dy = \frac{4}{3}.$$

8. 求抛物线 $y^2 = 2px + p^2$ 与 $y^2 = -2qx + q^2\,(p,q>0)$ 所围图形的面积.

解　联立两个抛物线方程，解得 $x = \frac{q-p}{2}, y = \pm\sqrt{pq}$，于是两抛物线所围的面积为

$$S = \int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{y^2}{2p}-\frac{p}{2}}^{\frac{q}{2}-\frac{y^2}{2q}} dx = \int_0^{\sqrt{pq}} \left[(p+q) - \frac{p+q}{pq}y^2\right]dy = \frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

9. 求四张平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 截得立体的体积.

解　设 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，利用对称性，有

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_D y\,dxdy,$$

于是

$$V = \iint_D (6-2x-3y)\,dxdy = 6 - 5\int_0^1 dx \int_0^1 y\,dy = \frac{7}{2}.$$

10. 求柱面 $y^2+z^2=1$ 与三张平面 $x=0, y=x, z=0$ 所围的在第一卦限的立体的体积.

解　设 D 是所围空间区域在 xy 平面的投影，则

$$D = \{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

于是

$$V = \iint_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \int_0^y dx = \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{1}{3}.$$

11. 求旋转抛物面 $z = x^2+y^2$，三个坐标平面及平面 $x+y=1$ 所围有界区域的体积.

解　设 D 是所围空间区域在 xy 平面的投影，则

$$D = \{(x,y) \mid x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\},$$

于是

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = 2\iint_D x^2\,dxdy = 2\int_0^1 x^2\,dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{6}.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，a, b 为常数．证明

(1) $\int_a^b dx \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^b f(y)(b-y)\,dy$;

(2) $\int_0^a dy \int_0^y e^{(a-x)} f(x)\,dx = \int_0^a (a-x)e^{(a-x)} f(x)\,dx\,(a>0)$.

证　(1) 交换积分次序，则得到

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy \int_y^b dx = \int_a^b f(y)(b-y)\,dy.$$

(2) 交换积分次序，则得到

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{e}^{(a-x)} f(x)\mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{(a-x)} f(x)\mathrm{d}x.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2}) f(x)\mathrm{d}x.$$

证 交换积分次序，则得到

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^y f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_{x^2}^x \mathrm{e}^y \mathrm{d}y = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2}) f(x)\mathrm{d}x.$$

14. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，证明

$$1 \leqslant \iint_D [\sin(x^2) + \cos(y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \sqrt{2}.$$

证
$$\iint_D [\sin(x^2) + \cos(y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \sin(x^2)\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 \cos(y^2)\mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sin(x^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 \cos(y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 [\sin(x^2) + \cos(x^2)]\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

当 $x \in [0,1]$ 时，成立

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1,$$

所以

$$1 \leqslant \iint_D [\sin(x^2) + \cos(y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \sqrt{2}.$$

15. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，利用不等式 $1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1 \left(|t| \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$，证明

$$\frac{49}{50} \leqslant \iint_D \cos(xy)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 1.$$

证 由

$$1 - \frac{(xy)^4}{2} \leqslant \cos(xy)^2 \leqslant 1,$$

易知

$$\iint_D \cos(xy)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 1,$$

另一方面，由于

$$\iint_D \left[1 - \frac{(xy)^4}{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x \int_0^1 y^4\mathrm{d}y = \frac{49}{50},$$

所以

$$\frac{49}{50} \leqslant \iint_D \cos(xy)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16. 设 D 是由 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域，D 在 x 轴和 y 轴上的投影长度分别为 l_x 和 l_y，(α,β) 是 D 内任意一点．证明：

(1) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant l_x l_y m D$;

(2) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{l_x^2 l_y^2}{4}$.

证　(1) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint\limits_D |x-\alpha|\,|y-\beta|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\leqslant l_x l_y \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = l_x l_y m D.$$

(2) 设 $D \subseteq D' = [a,b]\times[c,d]$，且 $b-a=l_x$，$d-c=l_y$，则

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint\limits_D |(x-\alpha)(y-\beta)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \iint\limits_{D'} |x-\alpha|\,|y-\beta|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b |x-\alpha|\,\mathrm{d}x \int_c^d |y-\beta|\,\mathrm{d}y,$$

由于 $\alpha \in [a,b]$，于是

$$\int_a^b |x-\alpha|\,\mathrm{d}x = -\int_a^\alpha (x-\alpha)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^b (x-\alpha)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[(\alpha-a)^2+(b-\alpha)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(b-\alpha)+(\alpha-a)]^2 - (b-\alpha)(\alpha-a) \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}l_x^2,$$

同理可得

$$\int_c^d |y-\beta|\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}l_y^2,$$

所以

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{l_x^2 l_y^2}{4}.$$

17. 利用重积分的性质和计算方法证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

证　由于

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} (f^2(x)+f^2(y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由对称性，

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} (f^2(x)+f^2(y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y = 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2.$$

证明一 将区间$[a,b]$$n$等分,并取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}e^{f(\xi_i)}\cdot\sum_{i=1}^{n}e^{-f(\xi_i)}\right\},$$

再利用不等式:当$x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$时成立

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2,$$

(注:上述不等式可由算术平均不小于几何平均得到)

就有

$$\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}e^{f(\xi_i)}\cdot\sum_{i=1}^{n}e^{-f(\xi_i)}\geqslant(b-a)^2,$$

所以

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant(b-a)^2.$$

证明二 设$D=[a,b]\times[a,b]$,由对称性,有

$$\iint\limits_{D}e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}e^{f(y)-f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是

$$\iint\limits_{D}e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2.$$

19. 设$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n\}$,计算下列$n$重积分:

(1) $\int\limits_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$;

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解 (1) $\int\limits_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

$$=n\int\limits_{\Omega}x_1^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=n\int_0^1x_1^2\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1\mathrm{d}x_n=\frac{n}{3}.$$

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_ix_j\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_i^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\int\limits_{\Omega}x_ix_j\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{n}{3}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{4}=\frac{n}{3}+\frac{1}{4}n(n-1)=\frac{n(3n+1)}{12}.$$

§3　重积分的变量代换

1. 利用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 所围区域；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x$ 所围区域；

(3) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x+y$ 所围区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限上的区域.

解　(1) $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-R^2})$.

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r}rdr=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{8}{15}$.

(3) $$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+y)dxdy&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2dr\\&=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta\\&=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 tdt=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

注　本题也可通过作变换

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,y=\frac{1}{2}+r\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

来求解.

(4) $$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. 求下列图形的面积：

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1(\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$ 所围的区域；

(2) 由抛物线 $y^2=mx,y^2=nx(0<m<n)$，直线 $y=\alpha x,y=\beta x(0<\alpha<\beta)$ 所围的区域；

(3) 三叶玫瑰线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)(a>0)$所围的图形;

(4) 曲线$\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(h,k>0;a,b>0)$所围图形在$x>0,y>0$的部分.

解 (1) 作变换$u=a_1x+b_1y+c_1,v=a_2x+b_2y+c_2$,则$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=a_1b_2-a_2b_1$,于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\iint_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

(2) 作变换$u=\frac{y^2}{x},v=\frac{y}{x}$,则$x=\frac{u}{v^2},y=\frac{u}{v},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{v^4}$,于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_m^n u\mathrm{d}u\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}v}{v^4}=\frac{1}{6}(n^2-m^2)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right).$$

(3) 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则曲线方程可化为极坐标形式$r=a\cos 3\theta$,于是面积

$$S=3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos 3\theta}r\mathrm{d}r=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}a^2.$$

(4) 作变换$\begin{cases}x=hr\cos^2\theta,\\y=kr\sin^2\theta,\end{cases}$则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=hkr\sin 2\theta$,而曲线方程化为

$$r^2=\frac{h^2}{a^2}\cos^4\theta+\frac{k^2}{b^2}\sin^4\theta,$$

于是面积

$$\begin{aligned}S&=hk\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}\cos^4\theta+\frac{k^2}{b^2}\sin^4\theta}}r\mathrm{d}r\\&=hk\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h^2}{a^2}\sin\theta\cos^5\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2}{b^2}\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=\frac{hk(a^2k^2+b^2h^2)}{6a^2b^2}.\end{aligned}$$

3. 求极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$f(x,y)$在原点附近连续.

解 由积分中值定理,

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\pi\rho^2,$$

其中$\xi^2+\eta^2\leqslant\rho^2$.

因为f连续,且当$\rho\to 0$时,$(\xi,\eta)\to(0,0)$,所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(0,0).$$

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由坐标轴及抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$所围的区域;

(2) $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 i) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围区域;ii) 圆 $x^2+y^2=R^2$ 所围的区域;

(3) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$,以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围的区域;

(4) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x+y=2, x=0$ 及 $y=0$ 所围的区域;

(5) $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中闭区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(6) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中闭区域 D 是由曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}-a(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 所围成.

解　(1) 作变换 $\begin{cases} u=\sqrt{x}, \\ v=\sqrt{y}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x=u^2, \\ y=v^2, \end{cases} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4uv$,于是

$$\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} (u+v)4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8\int_0^1 v\mathrm{d}v\int_0^{1-v} u^2\mathrm{d}u$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 [(1-v)^3-(1-v)^4]\mathrm{d}v = \frac{2}{15}.$$

注　本题也可通过作变换 $x=r\cos^4\theta, y=r\sin^4\theta$ 来求解.

(2) i) 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases}$ 则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$,于是

$$\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}ab;$$

ii) 利用极坐标变换,得到

$$\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi(a^2+b^2)R^4}{4a^2b^2}.$$

(3) $$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{-2\leqslant x\leqslant 0\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\sqrt{2y-y^2}\geqslant -x} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-2}^0 \mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\mathrm{d}r$$

$$= 4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = 4-\frac{\pi}{2}.$$

(4) 作变换 $u=x+y, v=\frac{x-y}{x+y}$,则 $x=\frac{1}{2}u(1+v), y=\frac{1}{2}u(1-v)$,直接计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{u}{2}.$$

由 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 2$,可得 $0\leqslant u\leqslant 2, -1\leqslant v\leqslant 1$,于是

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^2 udu\int_{-1}^1 e^v dv=e-\frac{1}{e}.$$

(5) 作变换 $u=x+y,v=x-y$,则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}$,于是

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2du\int_{-1}^1\frac{dv}{1+v^2}=\frac{\pi}{6}.$$

(6) 利用极坐标,得到

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr,$$

由

$$\int\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr=-\int r\,d\sqrt{4a^2-r^2}=-r\sqrt{4a^2-r^2}+\int\sqrt{4a^2-r^2}dr$$

以及

$$\int\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr=\int\frac{4a^2-(4a^2-r^2)}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr=4a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\int\sqrt{4a^2-r^2}dr,$$

可得

$$\int\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr=2a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}+C,$$

所以

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^0(\sin\theta\cos\theta-\theta)d\theta=\frac{\pi^2-8}{16}a^2.$$

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$,其中 Ω 为球 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$;

(2) $\iiint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$,其中 Ω 为椭球

$\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$;

(3) $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$,其中 Ω 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面

$z=0,z=a(a>0)$ 和 $y=0$ 所围的区域;

(4) $\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$,其中 Ω 为半球

$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0\}$;

(5) $\iiint_\Omega (x+y+z)^2dxdydz$,其中 Ω 为抛物面 $x^2+y^2=2az$ 与球面

$x^2+y^2+z^2=3a^2(a>0)$ 所围的区域.

(6) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$,其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面

与平面 $z=8$ 所围的区域；

(7) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1\}$；

(8) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x+y-z\leqslant 1,0\leqslant x-y+z\leqslant 1,0\leqslant y+z-x\leqslant 1\}$.

解　(1) 应用球面坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5}.$$

(2) 应用广义球面坐标，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\mathrm{d}r\\&=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

令 $r=\sin t$，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\sin^2t\mathrm{d}t\\&=\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\pi^2 abc.\end{aligned}$$

(3) 应用柱面坐标，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\int_0^a z\mathrm{d}z=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{8}{9}a^2.\end{aligned}$$

(4) 应用柱面坐标，则

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\frac{z\ln(1+r^2+z^2)}{1+r^2+z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r[\ln^2 2-\ln^2(1+r^2)]\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{4}\ln^2 2-\frac{\pi}{4}\int_1^2\ln^2 t\mathrm{d}t=\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln^2 2\right)\pi.\end{aligned}$$

(5) 由于 Ω 关于 yz 平面和 zx 平面都对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

于是

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

应用柱面坐标,就有

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left[r^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^4}{2a}+\frac{1}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^6}{24a^3}\right]r\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left[3a^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{2}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{2a}-\frac{r^6}{24a^3}\right]r\mathrm{d}r\\&=\pi\left[2(3\sqrt{3}-1)a^5-\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-1)a^5-\frac{8a^6}{6a}-\frac{16a^8}{96a^3}\right]\\&=\frac{108\sqrt{3}-97}{30}\pi a^5.\end{aligned}$$

(6) 可得 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=8$ 所围,应用柱面坐标,则

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^8\mathrm{d}z=2\pi\int_0^4r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\frac{1\,024}{3}\pi.$$

(7) 应用球面坐标,则

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\mathrm{d}r\\&=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

(8) 作变换 $u=x+y-z,v=x-y+z,w=y+z-x$,则 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=-4$,于是 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{4}$,所以

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_{\Omega'}uvw\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{1}{4}\int_0^1u\mathrm{d}u\int_0^1v\mathrm{d}v\int_0^1w\mathrm{d}w=\frac{1}{32}.\end{aligned}$$

6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$ 所围立体的体积.

解

$$\begin{aligned}V&=2\iint_{x^2+y^2\leqslant Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r\\&=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{6\pi-8}{9}R^3.\end{aligned}$$

7. 求抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积.

解 联立两个曲面方程,解得交线所在的平面为 $z=2$,所围空间区域在 xy 平面的投影区域为

$$D:x^2+y^2\leqslant 4,$$

于是

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 (6-r^2-r)r\,\mathrm{d}r=\frac{32}{3}\pi.$$

8. 求下列曲面所围空间区域的体积：

(1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=ax\,(a,b,c>0)$；

(2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\,(a,b,c>0)$ 与三张平面 $x=0,y=0,z=0$ 所围的在第一卦限的立体.

解　(1) 作变量代换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi.$

由于 $x\geqslant 0$，所以 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}$. 于是

$$V=abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{3}a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{3}a^3bc.$$

(2) 作变量代换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos^2\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin^2\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi\sin 2\theta$，于是

$$V=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{abc}{3}.$$

9. 设一物体在空间的表示为由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 与平面 $z=5$ 所围成的一立体. 其密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，求此物体的质量.

解　设物体的质量为 M，则

$$M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r\int_{\frac{5}{2}r}^5\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2 r^3\left(5-\frac{5}{2}r\right)\mathrm{d}r=8\pi.$$

10. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内，已经盛有 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水，现又倒入 $120\ \pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水，问水面比原来升高多少厘米.

解　设容器盛有 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$ 水时水面的高为 h，则

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}r(h-r^2)\,\mathrm{d}r=8\pi,$$

即 $\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{4}h^2=4$，从而解得

$$h=4\ (\mathrm{cm}).$$

又设容器盛有 $128\pi\ \mathrm{cm}^3$ 水时水面的高为 H，则

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{H}}r(H-r^2)\,\mathrm{d}r=128\pi,$$

即$\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{4}H^2=64$,从而解得

$$H=16\ (\mathrm{cm}),$$

所以水面比原来升高 12 cm.

11. 求质量为 M 的均匀薄片$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,\\ z=0\end{cases}$对 z 轴上$(0,0,c)\ (c>0)$点处的单位质量的质点的引力.

解 设薄片对单位质量的质点的引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$,由对称性,$F_x=F_y=0$.

在均匀薄片上点$(x,y,0)$的附近取一小块,其面积设为 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,根据万有引力定律,这小块微元对质点的引力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\left(\frac{G\rho x}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\frac{G\rho y}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$

于是

$$\mathrm{d}F_z=-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$F_z=-\iint_D\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-G\rho c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-2\pi G\rho c\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)=-\frac{2MG}{a^2}\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right),$$

其中 G 是万有引力常数,M 是均匀薄片的质量,ρ 是均匀薄片的密度.

12. 已知球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$,在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方,求球体的质量与质心.

解 设球体的质量为 M,则

$$M=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5.$$

设质心的坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性,$\bar{x}=\bar{y}=0$. 由

$$\iiint_\Omega z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\pi R^6,$$

得到

$$\bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{M}=\frac{5}{4}R,$$

所以质心坐标为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

13. 证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\leqslant\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

证 首先有

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\leqslant\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

另一方面，由 $\sin^2 u \leqslant u^2$，得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \geqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{16+r^2}} = 2\pi(\sqrt{17}-4).$$

所以

$$2\pi(\sqrt{17}-4) \leqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

14. 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明：

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

证　作变换 $u=x+y, v=x-y$，则 $-1\leqslant u\leqslant 1$，$-1\leqslant v\leqslant 1$，变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}.$$

于是

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u \int_{-1}^1 \mathrm{d}v = \int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

15. 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续．证明：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^1 f(u)(1-u^2)\,\mathrm{d}u,$$

其中 Ω 为单位球 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

证

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 f(z)\,\mathrm{d}z \iint\limits_{\Omega_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Omega_z: x^2+y^2\leqslant 1-z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 f(z)\,\mathrm{d}z \iint\limits_{\Omega_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\,\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^1 f(u)(1-u^2)\,\mathrm{d}u.$$

16. 计算下列 n 重积分：

(1) $\int\limits_{\Omega} \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，其中

$$\Omega = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1, x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n\};$$

(2) $\int\limits_{\Omega} (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，其中 Ω 为 n 维球体

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}.$$

解 (1) 作变量代换 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\ y_2 = \quad x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \quad\quad\quad\quad x_n, \end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = 1$, 从而 $\dfrac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = 1$, 于是

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{\Omega'} \sqrt{y_1}\, \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n \\ &= \int_0^1 \sqrt{y_1}\, \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \int_0^{y_2} \mathrm{d}y_3 \cdots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n \\ &= \frac{1}{(n-i)!} \int_0^1 \sqrt{y_1}\, \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \int_0^{y_2} \mathrm{d}y_3 \cdots \int_0^{y_{i-1}} y_i^{n-i} \mathrm{d}y_i \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 y_1^{\frac{1}{2}+n-1} \mathrm{d}y_1 = \frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}. \end{aligned}$$

(2) 作球面坐标变换 $\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}, \end{cases}$

它把 Ω 变为

$$\Omega' = \{(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi (i = 1, 2, \cdots, n-2), 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi\}.$$

它的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2},$$

于是

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_0^1 r^{n+1} \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \int_0^{\pi} \sin^2\varphi_{n-3} \mathrm{d}\varphi_{n-3} \int_0^{\pi} \sin\varphi_{n-2} \mathrm{d}\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

由于当 k 为正整数时, $\int_0^{\pi} \sin^{k-1}\varphi \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}\varphi \mathrm{d}\varphi$, 利用 Wallis 公式,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

于是得到

$$\int_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,dx_1dx_2\cdots dx_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^m}{(m-1)!\ (m+1)}, & n=2m,\\ \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!\ (2m+3)}, & n=2m+1.\end{cases}$$

§4　反常重积分

1. 讨论下列反常重积分的敛散性：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\dfrac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$；

(2) $\iint\limits_{D}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dxdy$，$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，而且 $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$（$m,M$ 为常数）；

(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$，其中 $\varphi(x,y)$ 满足与上题同样的条件；

(4) $\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\dfrac{dxdy}{|x-y|^p}$；

(5) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$.

解　(1) 由于

$$\iint\limits_{|x|\leqslant A,|y|\leqslant B}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=\int_{-A}^{A}\frac{dx}{1+|x|^p}\int_{-B}^{B}\frac{dy}{1+|y|^q},$$

当 A,B 都趋于正无穷大时，等式右端的积分当且仅当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，所以原积分当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，而在其他情况下发散.

(2) 由于

$$\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(1+x^2+y^2)^p},$$

而积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^p}dxdy$ 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散，所以原积分当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散.

(3) 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

而

$$\iint\limits_{\rho^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\rho}^{1}\frac{rdr}{(1-r^2)^p}=-\pi\int_{\rho}^{1}\frac{d(1-r^2)}{(1-r^2)^p},$$

当 $\rho\to 0$ 时，等式右端的积分当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散，所以原积分当 $p<1$ 时收

敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散.

(4) $[0,a]\times[0,a]=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant a\},D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant a\}.$$

则

$$\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}=\iint\limits_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p}+\iint\limits_{D_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(y-x)^p}$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a\frac{\mathrm{d}x}{(x-y)^p}+\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a\frac{\mathrm{d}y}{(y-x)^p},$$

可知当 $p<1$ 时积分收敛，当 $p\geqslant 1$ 时积分发散.

(5) 利用球面坐标，得到

$$\iiint\limits_{\rho^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=4\pi\int_\rho^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}},$$

当 $\rho\to 0$ 时，右边的积分当且仅当 $2p-2<1$ 即 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，所以原积分当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时发散.

2. 计算下列反常重积分：

(1) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}$，其中 $D=\{(x,y)\mid xy\geqslant 1,x\geqslant 1\}$，且 $p>q>1$；

(2) $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 (1) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{y^q}\mathrm{d}y.$

$$=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-q+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(2) 作广义极坐标变换 $x=a\cos\theta,y=b\sin\theta$，则

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\iint\limits_{r\geqslant 1}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi ab}{\mathrm{e}}.$$

(3) $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^3=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

3. 设 D 是由第一象限内的抛物线 $y=x^2$，圆周 $x^2+y^2=1$ 以及 x 轴所围的平面区域，证明 $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 收敛.

证 取 $r>0$ 充分小，设 $D_r=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2,0\leqslant x\leqslant r\}$，$x_0$ 是抛物线 $y=x^2$ 与圆周 $x^2+y^2=1$ 交点的横坐标，则

$$\iint_{D\setminus D_r}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_r^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{x_0}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_r^{x_0}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

由于$\lim\limits_{r\to0}\int_r^{x_0}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$存在，所以$\lim\limits_{r\to0}\iint_{D\setminus D_r}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$存在，即反常积分$\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$收敛.

4. 判别反常重积分

$$I=\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛. 如果收敛，求其值.

解　因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$收敛，所以$I=\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$收敛，并且

$$I=\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\pi^2.$$

5. 设$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{-\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求$F'(t)$.

解　当$t>0$时，令$\begin{cases}x=tu,\\y=tv,\end{cases}$则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=t^2$，于是

$$F(t)=t^2\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant1\\0\leqslant v\leqslant1}}\mathrm{e}^{-\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$F'(t)=2t\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant1\\0\leqslant v\leqslant1}}\mathrm{e}^{-\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2F(t)}{t}.$$

当$t=0$时，$F(0)=0$，易得

$$F'(0)=\lim_{t\to0+}\frac{F(t)-F(0)}{t}=0.$$

6. 设函数$f(x)$在$[0,a]$上连续，证明

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　由于

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x,$$

在积分$\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x$中，令$x=y\cos^2t+a\sin^2t$，则$\mathrm{d}x=(a-y)\sin2t\mathrm{d}t$，且当$x:y\to a$时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\mathrm{d}t=\pi,$$

所以

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 计算积分 $\int\limits_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_2^2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_n^2}\mathrm{d}x_n=\pi^{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

§5 微分形式

1. 计算下列外积：

(1) $(x\mathrm{d}x+7z^2\mathrm{d}y)\wedge(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}z)$；

(2) $(\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\wedge(\sin y\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}y)$；

(3) $(6\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+27\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$.

解 (1) $(x\mathrm{d}x+7z^2\mathrm{d}y)\wedge(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}z)$

$$=-(x^2+7yz^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+42z^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-6x\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$$

(2) $(\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\wedge(\sin y\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}y)$

$$=-\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

(3) $(6\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+27\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$

$$=-21\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

2. 设

$$\omega=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4,$$

$$\eta=b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4.$$

求 $\omega+\eta$ 和 $\omega\wedge\eta$.

解

$$\begin{aligned}\omega+\eta=&a_0+a_1\mathrm{d}x_1+b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+(a_2+b_2)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+\\&b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(a_3+b_4)\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4;\\\omega\wedge\eta=&a_0b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+a_0b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_0b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\\&a_0b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+a_1b_4\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4.\end{aligned}$$

3. 求

$$\begin{aligned}\omega=&x_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(1+x_2^2)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_2^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\\&(x_3^2+x_2^2)\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3-x_1^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

的标准形式.

解

$$\omega=x_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+(x_1^2+x_3)\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3-(x_2^2+x_3^2)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3.$$

4. 证明外积满足分配律和结合律.

证　由外积的线性性质，只需对 ω,η,σ 分别是 p - 形式、q - 形式和 r - 形式的情形证明即可.

设 $\omega=\sum_I f_I(x)\mathrm{d}x_I,\eta=\sum_J g_J(x)\mathrm{d}x_J,\sigma=\sum_K h_K(x)\mathrm{d}x_K$，则

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)\wedge\sigma&=\Big(\sum_I f_I(x)\mathrm{d}x_I+\sum_J g_J(x)\mathrm{d}x_J\Big)\wedge\sum_K h_K(x)\mathrm{d}x_K\\&=\sum_{I,K} f_I(x)h_K(x)\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_K+\sum_{J,K} g_J(x)h_K(x)\mathrm{d}x_J\wedge\mathrm{d}x_K\\&=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\wedge(\omega+\eta)&=\sum_K h_K(x)\mathrm{d}x_K\wedge\Big(\sum_I f_I(x)\mathrm{d}x_I+\sum_J g_J(x)\mathrm{d}x_J\Big)\\&=\sum_{K,I} h_K(x)f_I(x)\mathrm{d}x_K\wedge\mathrm{d}x_I+\sum_{K,J} h_K(x)g_J(x)\mathrm{d}x_K\wedge\mathrm{d}x_J\\&=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma&=\Big(\sum_{I,J} f_I(x)g_J(x)\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J\Big)\wedge\sum_K h_K(x)\mathrm{d}x_K\\&=\sum_{I,J,K} f_I(x)g_J(x)h_K(x)\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J\wedge\mathrm{d}x_K\\&=\Big(\sum_I f_I(x)\mathrm{d}x_I\Big)\wedge\Big(\sum_{J,K} g_J(x)h_K(x)\mathrm{d}x_J\wedge\mathrm{d}x_K\Big)\\&=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma).\end{aligned}$$

5. 写出微分形式 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在下列变换下的表达式：

（1）柱面坐标变换

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z;$$

（2）球面坐标变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi.$$

解　（1）由

$$\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z=\mathrm{d}z,$$

得到

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z.$$

（2）由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}r+r\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta,\\\mathrm{d}y&=\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi+r\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta,\\\mathrm{d}z&=\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

得到

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta.$$

6. 设 $\omega_j=\sum_{i=1}^{n} a_i^j\mathrm{d}x_i(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1 - 形式，证明

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det(a_i^j)\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.$$

证　由于

$$x_i\wedge x_j=-x_j\wedge x_i(i,j=1,2,\cdots,n),x_i\wedge x_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n &= \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_n}^n \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_n} \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n}^{n} (-1)^{\sigma} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_n}^n \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \det(a_i^j)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n ,\end{aligned}$$

其中 σ 是排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 的逆序数.

第十四章
曲线积分、曲面积分与场论

§1 第一类曲线积分与第一类曲面积分

1. 求下列第一类曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 是以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形；

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$；

(3) $\int_L |x|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s$，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$；

(4) $\int_L |x|\mathrm{d}s$，其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$；

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，$L$ 为一段螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(6) $\int_L xyz\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x=t, y=\frac{2\sqrt{2t^3}}{3}, z=\frac{1}{2}t^2$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的一段弧；

(7) $\int_L (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线.

解 (1) $$\int_L (x+y)\mathrm{d}s = \int_{OA} (x+y)\mathrm{d}s + \int_{AB} (x+y)\mathrm{d}s + \int_{BO} (x+y)\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^1 y\mathrm{d}y = 1+\sqrt{2}.$$

(2) $$\int_L |y|\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = 4.$$

(3) 令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，则 $\mathrm{d}s=3a|\sin t\cos t|\mathrm{d}t$，于是
$$\int_L |x|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s = 3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi} |\sin t\cos^2 t|\mathrm{d}t = 12a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\mathrm{d}t = 4a^{\frac{4}{3}}.$$

(4) 将 L 表示为参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, \end{cases}$ 再利用对称性，就有

$$\int_L |x|\,ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta \sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}.$$

注 本题也可利用 L 的极坐标方程 $r^2=\cos 2\theta$，得到

$$\int_L |x|\,ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}.$$

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

(6) $\int_L xyz\,ds = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{1+2t+t^2}\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$

(7) 因为在 L 上成立

$$xy+yz+zx = \frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)],$$

所以

$$\int_L (xy+yz+zx)\,ds = -\frac{a^2}{2}\int_L ds = -\pi a^3.$$

2. 求椭圆周 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的质量，已知曲线在点 $M(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y)=|y|$.

解 质量 $m = \int_L \rho\,ds = b\int_0^{2\pi} |\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$

$$= 2b\int_0^{\pi} \sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,dt$$

$$= \begin{cases} 2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, & \text{当 } a>b \text{ 时}, \\ 4a^2, & \text{当 } a=b \text{ 时}, \\ 2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}, & \text{当 } a<b \text{ 时}. \end{cases}$$

3. 求下列曲面的面积：

(1) $z=axy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 内的部分；

(2) 锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2(z\geqslant 0)$ 被平面 $x+y+z=2a(a>0)$ 所截的部分；

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 内的部分；

(4) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被两平面 $x+z=0, x-z=0(x>0, y>0)$ 所截部分；

(5) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$ 内的那部分；

(6) 环面 $\begin{cases} x=(b+a\cos\theta)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\theta)\sin\varphi, \\ z=a\sin\theta, \end{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，其中 $0<a<b$.

解 (1) $A = \iint_D \sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \sqrt{1+a^2r^2}\, r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3a^2}\left(\sqrt{(1+a^4)^3}-1\right).$$

(2) 联立锥面与平面方程，消去 z，得到

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2,$$

这是所截的部分在 xy 平面上投影区域的边界，它是个椭圆．记

$$D=\{(x,y)\mid (x^2-xy+y^2)+2a(x+y)\leqslant 2a^2\},$$

再令 $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u-v, \end{cases}$ 则区域 D 与区域

$$D'=\{(u,v)\mid (u+2a)^2+3v^2\leqslant 6a^2\}$$

对应，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-2$，于是所截部分的面积为

$$A=\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} 4\mathrm{d}u\mathrm{d}v=8\sqrt{3}\pi a^2.$$

(3) 这部分球面在 xy 平面上的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant \dfrac{a^2}{2}\right\}$，于是

$$A=\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}} r\mathrm{d}r = (2-\sqrt{2})\pi a^2.$$

(4) 圆柱面方程可写成 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，区域 $D=\{(z,x)\mid -x\leqslant z\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant a\}$，于是

$$A=\iint_D \sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^a \mathrm{d}x\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z=2a^2.$$

(5) 方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 可化为极坐标方程 $r^2=a^2\sin 2\theta$，于是

$$A=2\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\sqrt{a^2+r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\sin\theta+\cos\theta)^3-1\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2.$$

(6) 由

$$x_\theta'=-a\sin\theta\cos\varphi, y_\theta'=-a\sin\theta\sin\varphi, z_\theta'=a\cos\theta,$$

$$x_\varphi'=-(b+a\cos\theta)\sin\varphi, y_\varphi'=(b+a\cos\theta)\cos\varphi, z_\varphi'=0,$$

可得

$$E=a^2, G=(b+a\cos\theta)^2, F=0,$$

所以

$$A=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=4\pi^2ab.$$

4. 求下列第一类曲面积分：

(1) $\iint_\Sigma(x+y+z)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,y\leqslant 0$；

(2) $\iint_\Sigma(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是区域 $\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$ 的边界；

(3) $\iint_\Sigma(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分；

(4) $\iint_\Sigma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=H$ 之间的部分；

(5) $\iint_\Sigma\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$；

(6) $\iint_\Sigma(x^3+y^2+z)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是抛物面 $2z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=8$ 之间的部分；

(7) $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$，其中 Σ 是螺旋面 $x=u\cos v,y=u\sin v,z=v,0\leqslant u\leqslant a,0\leqslant v\leqslant 2\pi$ 的一部分.

解 (1) 由对称性，

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma(x+y+z)\,\mathrm{d}S&=\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=-\iint_{\Sigma_{zx}}\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=-\pi a^3.\end{aligned}$$

(2) 设 $\Sigma_1:z=\sqrt{x^2+y^2},\Sigma_2:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，则

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S\\&=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\iint_\Sigma(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r\\&=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.\end{aligned}$$

(4) 设 $\Sigma_1:x=\sqrt{a^2-y^2},\Sigma_2:x=-\sqrt{a^2-y^2}(0\leqslant z\leqslant H)$，则

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S\\&=2\iint_{\Sigma_{yz}}\frac{1}{a^2+z^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=2\int_0^H \frac{a\mathrm{d}z}{a^2+z^2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y=2\pi\arctan\frac{H}{a}.$$

(5) 由对称性,有 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$,又由于

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}a^2\mathrm{d}S=4\pi a^4,$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S=\frac{13}{12}\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\frac{13}{9}\pi a^4.$$

(6) 由对称性,有 $\iint\limits_{\Sigma}x^3\,\mathrm{d}S=0$, $\iint\limits_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$,再由 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,得到

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\sqrt{1+r^2}r^3\mathrm{d}r=\pi\int_0^4[(1+r^2)^{\frac{3}{2}}-(1+r^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}(1+r^2)$$

$$=\frac{1\,564\sqrt{17}+4}{15}\pi.$$

(7) 由 $x'_u=\cos v,y'_u=\sin v,z'_u=0,x'_v=-u\sin v,y'_v=u\cos v,z'_v=1$,得到

$$E=1,G=1+u^2,F=0.$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}v\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}v\mathrm{d}v\int_0^a\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$

5. 设球面 Σ 的半径为 R,球心在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上. 问当 R 为何值时,Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的面积最大? 并求该最大面积.

解　不妨设 Σ 的球心坐标为 $(0,0,a)$,于是 Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的曲面方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}.$$

将此方程与球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 联立,解得 $z=\frac{2a^2-R^2}{2a}$,这样,Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的部分在 Oxy 平面上的投影为

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-\frac{R^4}{4a^2}\right\},$$

从而面积为

$$S(R)=\iint\limits_{D}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sqrt{1-\frac{R^2}{4a^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{2a}\right).$$

对 $S(R)$ 求导，得

$$S'(R)=\frac{\pi}{a}(4aR-3R^2),$$

令 $S'(R)=0$，得到 $R=\frac{4}{3}a$. 由于 $S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0$，所以当 $R=\frac{4}{3}a$ 时，面积最大，面积最大值为

$$S_{\max}=\frac{32}{27}\pi a^2.$$

6. 求密度为 $\rho(x,y)=z$ 的抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 的质量与质心.

解 质量 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r^2$$

$$=\frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi.$$

设质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$.

$$\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^5\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}r^4\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r^2,$$

作代换 $t=\sqrt{1+r^2}$，得到

$$\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y)\mathrm{d}S=\frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{3}}2(t^2-1)^2t^2\mathrm{d}t=\frac{66\sqrt{3}-4}{105}\pi,$$

于是

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y)\mathrm{d}S}{M}=\frac{596-45\sqrt{3}}{749},$$

所以质心为 $\left(0,0,\frac{596-45\sqrt{3}}{749}\right)$.

7. 求均匀球面（半径是 a，密度是 1）对不在该球面上的质点（质量为 1）的引力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，质点的坐标为 $(0,0,b)$ $(0\leqslant b\neq a)$. 在球面上 (x,y,z) 处取一微元，面积为 $\mathrm{d}S$，它对质点的引力为

$$\mathrm{d}F=\frac{G\mathrm{d}S}{x^2+y^2+(z-b)^2}.$$

由对称性，$F_x=F_y=0$，

$$F_z=\iint\limits_{\Sigma}\frac{G(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S.$$

令 $\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta,\\ y=a\sin\varphi\sin\theta,\\ z=a\cos\varphi,\end{cases}$ 得到 $\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin\varphi$，于是

$$F_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{G(a\cos\varphi-b)a^2\sin\varphi}{(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi,$$

在上述积分中，再令 $t=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$，得到

$$F_z=-\frac{\pi Ga}{b^2}\int_{|a-b|}^{a+b}\frac{b^2-a^2+t^2}{t^2}\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & b<a,\\ -\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2}, & b>a,\end{cases}$$

所以当 $b<a$ 时，引力 $\boldsymbol{F}=(0,0,0)$；当 $b>a$ 时，引力 $\boldsymbol{F}=\left(0,0,-\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2}\right)$.

8. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数，它在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续的二阶偏导数．记 Σ 为以 M 点为中心，半径为 R 的球面，以及

$$T(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

（1）证明：$\lim\limits_{R\to0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)$；

（2）若 $\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq0$，求当 $R\to0$ 时无穷小量 $T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$ 的主要部分.

解　（1）由于 $u(x,y,z)$ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处连续，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$ 时，成立

$$|u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon.$$

于是当 $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$ 时，

$$\left|\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S-u(x_0,y_0,z_0)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}|u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)|\mathrm{d}S<\varepsilon,$$

所以成立

$$\lim_{R\to0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0).$$

（2）令 $\begin{cases}x=x_0+R\xi,\\ y=y_0+R\eta,\\ z=z_0+R\zeta,\end{cases}$ 则

$$T(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*}u(x_0+R\xi,y_0+R\eta,z_0+R\zeta)\mathrm{d}S,$$

其中 $\Sigma^*=\{(\xi,\eta,\zeta)\mid\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\}$．利用对称性，有

$$\iint_{\Sigma^*}\xi\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\eta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\zeta\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi\eta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\eta\zeta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\zeta\xi\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\eta^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\zeta^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma^*}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi.$$

由于

$$T'(R)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma^*}[\xi u'_x+\eta u'_y+\zeta u'_z]\mathrm{d}S,$$

$$T''(R)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma^*}[\xi^2u''_{xx}+\eta^2u''_{yy}+\zeta^2u''_{zz}+2(\xi\eta u''_{xy}+\xi\zeta u''_{xz}+\eta\zeta u''_{yz})]\mathrm{d}S,$$

以 $R=0$ 代入,得到

$$T'(0)=0,$$

$$T''(0)=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}.$$

由 Taylor 公式,即知当 $R\to0$ 时,无穷小量 $T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$ 的主要部分为 $\frac{R^2}{6}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$.

9. 设 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geqslant0)$,$\pi$ 为 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为原点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离,求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解 因为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 在 $P(x,y,z)$ 点的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,2z)$,所以切平面 π 的方程为

$$xX+yY+2zZ=2,$$

从而原点到 π 的距离为

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}.$$

令 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2+4z^2}=\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}$,由

$$x'_\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta,y'_\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta,z'_\varphi=-\sin\varphi,$$

$$x'_\theta=-\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,y'_\theta=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta,z'_\theta=0,$$

得到

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi},$$

由此得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\pi.$$

注 本题也可由 $\Sigma:z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2-y^2}$ 投影到 xy 平面上来计算得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi.$$

10. 设 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 证明

$$\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u,$$

其中 a,b,c 为不全为零的常数，$f(u)$ 是 $|u| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上的一元连续函数.

证　将 xyz 坐标系保持原点不动旋转成 $x'y'z'$ 坐标系，使 z' 轴上的单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$，由于旋转变换是正交变换，保持度量不变，所以球面 Σ 上的面积元 $\mathrm{d}S$ 也不变. 设球面 Σ 上一点 (x,y,z) 的新坐标为 (x',y',z')，则 $ax+by+cz = \sqrt{a^2+b^2+c^2}z'$，于是

$$\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z')\,\mathrm{d}S.$$

下面计算这一曲面积分. 令球面 Σ 的参数方程为

$$x' = \sin\varphi\cos\theta, y' = \sin\varphi\sin\theta, z' = \cos\varphi,$$

则

$$\sqrt{EG-F^2} = \sin\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

11. 设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程（设长度单位为 cm，时间单位为 h）

$$z = h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}.$$

已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9）. 问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多少时间？

解　雪堆的体积为

$$V(t) = \iint_D \left(h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left(h(t)-\frac{2}{h(t)}r^2\right)r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}h^3(t),$$

雪堆的侧面积为

$$\begin{aligned}S(t) &= \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{h(t)}\iint_D \sqrt{h^2(t)+16(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,r\,\mathrm{d}r = \frac{13}{12}\pi h^2(t).\end{aligned}$$

由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{9}{10}S(t)$，得到 $h'(t) = -\frac{13}{10}$，注意到 $h(0) = 130$（cm），得到

$$h(t) = 130 - \frac{13}{10}t.$$

因为当雪堆全部融化即 $h(t) = 0$ 时，有 $t = 100$（h），所以雪堆全部融化需100 小时.

§2 第二类曲线积分与第二类曲面积分

1. 求下列第二类曲线积分：

(1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是以 $A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(2,1)$，$D(1,1)$ 为顶点的正方形，方向为逆时针方向；

(2) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线的一段：$y=x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，方向由 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$；

(3) $\int_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针方向；

(4) $\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是曲线 $x=\mathrm{e}^t$，$y=\mathrm{e}^{-t}$，$z=a^t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，方向由 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^{-1},a)$ 到 $(1,1,1)$；

(5) $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 L 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的直线段；

(6) $\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az,\\ x+z=a\ (a>0),\end{cases}$ 若从 z 轴的正向看去，L 的方向为逆时针方向；

(7) $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$L$ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y=x\tan\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}$ 若从 x 轴的正向看去，这个圆周的方向为逆时针方向.

解 (1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$

$$=\left\{\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right\}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 (4-y^2)\mathrm{d}y+\int_2^1 (x^2+1)\mathrm{d}x+\int_1^0 (1-y^2)\mathrm{d}y=2.$$

(2) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 [(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^1 (x^2-4x^4)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

(3) $\int_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$$=\int_0^{2\pi} [(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t]\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(4) $I=\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\int_1^0[2+(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t})a^t\ln a]\mathrm{d}t.$

当 $a=\mathrm{e}^2$ 时，$I=\int_1^0(4+2\mathrm{e}^{4t})\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}(7+\mathrm{e}^4)$；

当 $a=\mathrm{e}^{-2}$ 时，$I=\int_0^1 2\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$；

当 $a\neq\mathrm{e}^2$ 且 $a\neq\mathrm{e}^{-2}$ 时，

$$I=-2+\ln a\int_1^0[(a\mathrm{e}^2)^t+(a\mathrm{e}^{-2})^t]\mathrm{d}t=-2+\left(\frac{1-a\mathrm{e}^2}{\ln a+2}+\frac{1-a\mathrm{e}^{-2}}{\ln a-2}\right)\ln a.$$

(5) $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=\int_0^1[1+t+2(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t=13.$

(6) 由曲线积分的定义，以 $z=a-x$ 代入积分，得到

$$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{L_{xy}}(y-x)\mathrm{d}x+(a-x)\mathrm{d}y,$$

其中 L_{xy} 为 L 在 xy 平面上的投影曲线(椭圆)$2x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向.

令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}a\cos t, y=a\sin t, t:0\to 2\pi$，则

$$\begin{aligned}&\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\\&=a^2\int_0^{2\pi}\left[\left(\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cos t\right]\mathrm{d}t\\&=-\sqrt{2}\pi a^2.\end{aligned}$$

(7) 由曲线积分的定义，以 $y=x\tan\alpha$ 代入积分，得到

$$\int_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=(1-\tan\alpha)\int_{L_{zx}}x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x,$$

其中 L_{zx} 为 L 在 zx 平面上的投影曲线(椭圆)$z^2+x^2\sec^2\alpha=1$，取顺时针方向.

令 $x=\cos\alpha\sin t, z=\cos t, t:2\pi\to 0$，则

$$\begin{aligned}&\int_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z\\&=(1-\tan\alpha)\int_{2\pi}^0\cos\alpha(-\sin^2 t-\cos^2 t)\mathrm{d}t=2\pi(\cos\alpha-\sin\alpha).\end{aligned}$$

2. 证明不等式

$$\left|\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant MC,$$

其中 C 是曲线 L 的弧长，$M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\mid(x,y)\in L\}$. 记圆周 $x^2+y^2=R^2$ 为 L_R，利用以上不等式估计

$$I_R=\int_{L_R}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0.$$

证 由 Schwarz 不等式及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，可得

$$\begin{aligned}\left|\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\right| &= \left|\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\,ds\right| \\ &\leqslant \int_L |P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta|\,ds \\ &\leqslant \int_L \sqrt{[P^2(x,y)+Q^2(x,y)][\cos^2\alpha+\cos^2\beta]}\,ds \\ &\leqslant M\int_L ds = MC.\end{aligned}$$

在积分 $I_R=\int_{L_R}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}$ 中，令 $P(x,y)=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$，则

$$P^2(x,y)+Q^2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}\leqslant\frac{16}{(x^2+y^2)^3},$$

于是 $|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}C=\frac{8\pi}{R^2}$，所以

$$\lim_{R\to+\infty} I_R=0.$$

3. 方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场．求质量为 m 的质点沿抛物线 $y^2=1-x$ 从点(1,0)移到(0,1)时，场力所做的功．

解 $$W=\int_L \boldsymbol{F}\,ds=-\int_0^1(1-y^2)^2\,dy=-\frac{8}{15}.$$

4. 计算下列第二类曲面积分：

(1) $\iint_\Sigma (x+y)\,dydz+(y+z)\,dzdx+(z+x)\,dxdy$，其中 Σ 是中心在原点，边长为 $2h$ 的立方体 $[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$ 的表面，方向取外侧；

(2) $\iint_\Sigma yzdzdx$，其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分，方向取上侧；

(3) $\iint_\Sigma zdydz+xdzdx+ydxdy$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=4$ 所截部分，方向取外侧；

(4) $\iint_\Sigma zxdydz+3dxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 $z\geqslant0$ 部分，方向取下侧；

(5) $\iint_\Sigma [f(x,y,z)+x]\,dydz+[2f(x,y,z)+y]\,dzdx+[f(x,y,z)+z]\,dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分，方向取上侧；

(6) $\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)\,dxdy$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$，方向取下侧；

(7) $\iint_\Sigma \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx$，其中 Σ 是抛物面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1,y=2$ 所围立体的表

面，方向取外侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向取外侧；

(9) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向取外侧.

解　(1) 将 Σ 的上、下、左、右、前、后六个面分别记为 $\Sigma_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint\limits_{\Sigma_5}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{\Sigma_5}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_6}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2h\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8h^3,\\\iint\limits_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\iint\limits_{\Sigma_3}(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_4}(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_{\Sigma_3}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_4}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2h\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=8h^3,\\\iint\limits_{\Sigma}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\Sigma_1}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2h\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8h^3,\end{aligned}$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24h^3.$$

(2) 设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S$，得到 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{c^2y}{b^2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于 Σ 的方向取上侧，它在 xy 平面的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1\right.\right\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\iint\limits_{\Sigma}\frac{c^2}{b^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{c^2}{b^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=abc^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}abc^2.\end{aligned}$$

(3) **解法一**

取曲面 Σ 的参数表示 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=\sin\theta,\\z=z,\end{cases}D=\{(\theta,z)\mid0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant z\leqslant4\}$，则

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}=\cos\theta,\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}=\sin\theta,\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)}=0.$$

由于 Σ 的方向取外侧，于是

$$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left[z\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}+\cos\theta\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}+\sin\theta\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)}\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^4 z\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^4 \mathrm{d}z = 0.$$

解法二

由于曲面 Σ 的单位法向量为 $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$，可知

$$\iint_\Sigma y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

将柱面 Σ 分成前后两部分 Σ_1, Σ_2，其中 $\Sigma_1: x = \sqrt{1-y^2}$，$\Sigma_2: x = -\sqrt{1-y^2}$，则

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_2} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

类似地，可得 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$，所以

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(4) 设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，由 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha \mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma \mathrm{d}S$，得到 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于 Σ 的方向取下侧，它在 xy 平面的投影区域为 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_\Sigma (2x^2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D [2x^2(4-x^2-y^2)+3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 [2r^2\cos^2\theta(4-r^2)+3]r\mathrm{d}r \\ &= -\frac{32}{3}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta - 12\pi = -\frac{68}{3}\pi.\end{aligned}$$

(5) 平面 Σ 的方程为 $x-y+z=1$，方向取上侧，由此可知 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma [f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_\Sigma \{[f(x,y,z)+x] - [2f(x,y,z)+y] + [f(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(6) 由对称性，$\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$，$\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$，所以

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h (r^2+5)r\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{2}(h^4+10h^2).\end{aligned}$$

(7) 记 $\Sigma_1: y = x^2+z^2 (1 \leqslant y \leqslant 2)$，方向取外侧；$\Sigma_2: y = 1 (x^2+z^2 \leqslant 1)$，方向取左侧；$\Sigma_3: y = 2 (x^2+z^2 \leqslant 2)$，方向取右侧，则

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\iint_{D_{1zx}}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^r dr=-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e),$$

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\iint_{D_{2zx}}\frac{e}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1}edr=-2e\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=\iint_{D_{3zx}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}dr=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi,$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\pi.$$

（8）设 Σ_1,Σ_2 分别表示上、下两半椭球面，方向分别取上、下侧，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dxdy=\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{z}dxdy+\iint_{\Sigma_2}\frac{1}{z}dxdy=2\iint_{D_{xy}}\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{abrdr}{c\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c},$$

由对称性，可得

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{y}dzdx=\frac{4\pi ac}{b},\iint_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz=\frac{4\pi bc}{a},$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy=\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

（9）设 Σ_1,Σ_2 分别表示上、下两半球面，方向分别取上、下侧．则

$$\iint_{\Sigma}z^2dxdy=\iint_{\Sigma_1}z^2dxdy+\iint_{\Sigma_2}z^2dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy-$$

$$\iint_{D_{xy}}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$=4c\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy=\frac{8}{3}\pi cR^3.$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma}x^2dydz=\frac{8}{3}\pi aR^3,\iint_{\Sigma}y^2dzdx=\frac{8}{3}\pi bR^3,$$

所以

$$\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3.$$

§3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

1. 利用 Green 公式计算下列积分：

(1) $\int_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$，其中 L 是以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界，逆时针方向；

(2) $\int_L xy^2 dx - x^2 y dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，逆时针方向；

(3) $\int_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy$，其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$，逆时针方向；

(4) $\int_L e^x [(1-\cos y) dx - (y - \sin y) dy]$，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi, 0)$ 的一段；

(5) $\int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分，方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$；

(6) $\int_L [e^x \sin y - b(x+y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy$，其中 a, b 是正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段；

(7) $\int_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，逆时针方向；

(8) $\int_L \frac{(x-y) dx + (x+4y) dy}{x^2 + 4y^2}$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向；

(9) $\int_L \frac{e^x [(x\sin y - y\cos y) dx + (x\cos y + y\sin y) dy]}{x^2 + y^2}$，其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线，逆时针方向.

解 (1) $\int_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy = \iint_D (-4x - 2y) dx dy$

$$= -2\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (2x+y) dy - 2\int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x} (2x+y) dy = -\frac{140}{3}.$$

(2) $\int_L xy^2 dx - x^2 y dy = \iint_D (-2xy - 2xy) dx dy$

$$= -4\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^a r^3 dr = 0.$$

(3) $\int_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy$

$$= \iint_D 0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(4) 设 $L_1: y=0, x: 0 \to \pi$，则

$$\int_{L+L_1^-} \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x - (y-\sin y)\mathrm{d}y] = \iint_D \mathrm{e}^x y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} y \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{5},$$

所以

$$\int_L \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x - (y-\sin y)\mathrm{d}y]$$

$$= \int_{L_1} \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x - (y-\sin y)\mathrm{d}y] + \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{5} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{5}.$$

(5) 设 $L_1: y=0, x: 0 \to 2$，则

$$\int_{L+L_1^-} (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y = \iint_D (1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

所以

$$\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y = \int_{L_1} (x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2 y)\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

(6) 设 $L_1: y=0, x: 0 \to 2a$，则

$$\int_{L+L_1} [\mathrm{e}^x \sin y - b(x+y)]\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - ax)\mathrm{d}y = \iint_D (b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

所以

$$\int_L [\mathrm{e}^x \sin y - b(x+y)]\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - ax)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2(b-a) - \int_{L_1} [\mathrm{e}^x \sin y - b(x+y)]\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - ax)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2(b-a) + b\int_0^{2a} x \mathrm{d}x = \left(2+\frac{\pi}{2}\right)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3.$$

(7) 设 $P(x,y) = -\dfrac{y}{4x^2+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_1: 4x^2+y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}.$$

令 $x = \dfrac{1}{2}\cos t, y = \sin t$，得到

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = \pi.$$

(8) 设 $P(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+4y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_1:x^2+4y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L_1}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}.$$

令 $x=\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t$，得到

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L_1}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\pi.$$

(9) 设 $P(x,y)=\frac{\mathrm{e}^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{\mathrm{e}^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{[(x^2+y^2)x+y^2-x^2]\cos y+(x^2+y^2-2x)y\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_r:x^2+y^2=r^2$，即 $x=r\cos t, y=r\sin t, t:0\to 2\pi$，由 Green 公式，

$$\int_L \frac{\mathrm{e}^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{L_r}\frac{\mathrm{e}^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}.$$

于是

$$I=\int_{L_r}\frac{\mathrm{e}^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\cos t}\cos(r\sin t)\mathrm{d}t,$$

令 $r\to 0$，即得到

$$I=2\pi.$$

2. 利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

(2) 抛物线 $(x+y)^2=ax(a>0)$ 与 x 轴；

(3) 旋轮线的一段：$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases} t\in[0,2\pi]$ 与 x 轴.

解 (1) $S=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$

(2) 令 $y=tx$，则 $x=\frac{a}{(1+t)^2}, y=\frac{at}{(1+t)^2}, t:0\to+\infty$. 于是

$$S=-\int_L y\mathrm{d}x=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)^5}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}a^2.$$

(3) $S=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-t\sin t-2\cos t)\mathrm{d}t=3\pi a^2.$

3. 先证明曲线积分与路径无关，再计算积分值：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$；

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$，其中 $\varphi(x),\psi(y)$ 为连续函数；

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路径.

解　(1) 设 $P(x,y)=x-y, Q(x,y)=-(x-y)$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

取积分路径为 $L: y=x, x: 0\to 1$，于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0.$$

(2) 设 $P(x,y)=\varphi(x), Q(x,y)=\psi(y)$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

取积分路径为 L：折线 $\overline{ABC}$，其中 $A(2,1), B(1,1), C(1,2)$，于是

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=\int_2^1\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\psi(y)\mathrm{d}y=\int_1^2[\psi(t)-\varphi(t)]\mathrm{d}t.$$

(3) 设 $P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

取积分路径为 L：折线 $\overline{ABC}$，其中 $A(1,0), B(6,0), C(6,8)$，于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^6\mathrm{d}x+\int_0^8\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{36+y^2}}=9.$$

4. 证明：$(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出它的一个原函数.

证　设 $P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x, Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y+2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分.

设这个函数为 $u(x,y)$，则

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y+C\\&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y=x^2\cos y+y^2\sin x+C.\end{aligned}$$

5. 证明：$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出它的一个原函数.

证　设 $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分.

设这个函数为 $u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+C=\int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^y\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C.$$

6. 设 $Q(x,y)$ 在 xy 平面上具有连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解 因为曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$，两边关于 x 积分，即得到 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，其中 φ 待定.

由条件 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，可得

$$\int_0^1(t^2+\varphi(y))\mathrm{d}y=\int_0^t(1+\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

两边对 t 求导，得到 $2t=1+\varphi(t)$，即 $\varphi(y)=2y-1$，所以

$$Q(x,y)=x^2+2y-1.$$

7. 确定常数 λ，使得右半平面 $x>0$ 上的向量函数 $\boldsymbol{r}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解 由题意，$\frac{\partial[2xy(x^4+y^2)^\lambda]}{\partial y}=\frac{\partial[-x^2(x^4+y^2)^\lambda]}{\partial x}$，即

$$2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

化简后，求得 $\lambda=-1$. 这时

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=-\int_0^y\frac{x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.$$

8. 设一力场为 $\boldsymbol{F}=(3x^2y+8xy^2)\boldsymbol{i}+(x^3+8x^2y+12ye^y)\boldsymbol{j}$，证明：质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关.

证 设 $P(x,y)=3x^2y+8xy^2$，$Q(x,y)=x^3+8x^2y+12ye^y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关.

9. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

(1) $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 的表面，方向取外侧；

(2) $\iint_\Sigma(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧；

(3) $\iint_\Sigma(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间的部分，方向取下侧；

(4) $\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\,dydz+8xydzdx-4zxdxdy$，其中 Σ 是由 xy 平面上的曲线 $x=e^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面，曲面的法向量与 x 轴的正向的夹角为钝角；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\,dydz+zdxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}(a>0)$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是

(i) 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧；

(ii) 抛物面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z\geqslant 0)$，方向取上侧.

解　(1) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域，则

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\,dxdydz=6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz=3a^4.$$

(2) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域，作变换 $\varphi:\begin{cases}u=x-y+z,\\ v=y-z+x,\\ w=z-x+y,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$，且变换 φ 将 Ω 变为 $\Omega'=\{(u,v,w)\mid |u|+|v|+|w|\leqslant 1\}$，记 Ω'' 是 Ω' 在第一象限的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\,dydz+(y-z+x)\,dzdx+(z-x+y)\,dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{3}{4}dudvdw=6\iiint\limits_{\Omega''}dudvdw=1.$$

(3) 补充 $\Sigma_1:z=h(x^2+y^2\leqslant h^2)$，方向取上侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，因为 Ω 的对称性，有 $\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz=0$. 由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\,dxdydz$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h rdr\int_r^h zdz=\frac{\pi}{2}h^4,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}h^2dxdy=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

(4) 补充 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\leqslant R^2)$，方向取下侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi R^3,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3.$$

(5) 由题意，可得 $\Sigma: x=\mathrm{e}^{\sqrt{y^2+z^2}}(y^2+z^2\leqslant a^2)$，方向取后侧．补充 $\Sigma_1: x=\mathrm{e}^a(y^2+z^2\leqslant a^2)$，方向取前侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\Sigma_1} 2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi a^2(\mathrm{e}^{2a}-1).$$

(6) 补充 $\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，方向取下侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z=-\frac{3}{2}\pi,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi-\iint\limits_{\Sigma_1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}.$$

(7) 由题意，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

补充 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$，方向取下侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-2\pi a^4-2\pi\int_{-a}^0 z(a^2-z^2)\mathrm{d}z=-\frac{3}{2}\pi a^4,\end{aligned}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi a^4-\iint\limits_{\Sigma_1} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\pi a^4,$$

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\pi a^3.$$

(8) (i) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，设原积分为 $\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

设 $\Sigma'=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$，方向为外侧，设 Ω 是 $\Sigma+(-\Sigma')$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+(-\Sigma')}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

由于 $\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}\mathrm{d}S=4\pi.\end{aligned}$$

注　对上面的积分，也可取 Σ' 的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta,\\y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta,\\z=\varepsilon\cos\varphi,\end{cases}$ 其中 $(\varphi,\theta)\in D'=\{0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\iint\limits_{D'}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=4\pi.\end{aligned}$$

(ii) 设 $\Sigma'=\left\{(x,y,z)\left|\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\leqslant1,z=0\right.\right\}-\left\{(x,y,z)\left|x^2+y^2<\varepsilon^2,z=0\right.\right\}$，方向为下侧，$\Sigma''=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2,z\geqslant0\}$，方向为下侧，则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'+\Sigma''}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=0,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}\mathrm{d}S=2\pi.\end{aligned}$$

注　对上面的积分，也可取 Σ'' 的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta,\\y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta,\\z=\varepsilon\cos\varphi,\end{cases}$ 其中 $(\varphi,\theta)\in D''=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant2\pi\right\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$$

$$= \iint_{D''} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

10. 利用 Gauss 公式证明阿基米德原理:将物体全部浸没在液体中时,物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量,而方向是垂直向上的.

证 以液面为 xy 平面,垂直向上的轴为 z 轴,在物体表面上点 (x,y,z) 处任取一微元,其面积为 $\mathrm{d}S$,设 $\boldsymbol{n}$ 为物体表面上点 (x,y,z) 处的单位(外)法向量,ρ 为液体密度. 则这小块面积所受的压力大小为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho z \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

它在 x 轴方向、y 轴方向、z 轴方向的分力分别为

$$\mathrm{d}F_x = \rho z\cos(\boldsymbol{n},x)\,\mathrm{d}S, \mathrm{d}F_y = \rho z\cos(\boldsymbol{n},y)\,\mathrm{d}S, \mathrm{d}F_z = \rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\,\mathrm{d}S,$$

于是由 Gauss 公式,

$$F_x = \rho\iint_{\Sigma} z\cos(\boldsymbol{n},x)\,\mathrm{d}S = 0, F_y = \rho\iint_{\Sigma} z\cos(\boldsymbol{n},y)\,\mathrm{d}S = 0,$$

$$F_z = \rho\iint_{\Sigma} z\cos(\boldsymbol{n},z)\,\mathrm{d}S = \rho\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho V,$$

这就是所要证明的.

11. 设某种流体的速度场为 $v = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$,求单位时间内流体

(1) 流过圆柱:$x^2 + y^2 \leqslant a^2$,$0 \leqslant z \leqslant h$ 的侧面(方向取外侧)的流量;

(2) 流过该圆柱的全表面(方向取外侧)的流量.

解 (1) 设 $\Sigma_1: z = 0(x^2 + y^2 \leqslant a^2)$,方向取下侧;$\Sigma_2: z = h(x^2 + y^2 \leqslant a^2)$,方向取上侧,$D$ 是 Σ_1,Σ_2 在 xy 平面上的投影区域. 由于

$$\iint_{\Sigma_1} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \iint_{\Sigma_2} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

所以流量

$$\iint_{\Sigma} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

(2) 由(1)可知,流过该圆柱的全表面的流量 $\iint_{\Sigma} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$

12. 利用 Stokes 公式计算下列曲线积分:

(1) $\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线(它是圆周),从 x 轴的正向看去,此圆周的方向是逆时针方向;

(2) $\int_L 3z\mathrm{d}x + 5x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}z$,其中 L 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = y + 3$ 的交线(它是椭圆),从 z 轴的正向看去,是逆时针方向;

(3) $\int_L (y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$,其中 L 为圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和平面 $\frac{x}{a} +$

$\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$的交线(它是椭圆),从 x 轴的正向看去,是逆时针方向;

(4) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 的表面所得的截痕,从 x 轴的正向看去,是逆时针方向;

(5) $\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$,其中 L 是沿着螺线

$$x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi,z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 的路径;

(6) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴的正向看去,是逆时针方向.

解　(1) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x+y+z=0$ 的部分,方向由右手法则确定(即取上侧). 由 Stokes 公式,

$$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 设 Σ 是 L 所围的平面 $z=y+3$ 的部分,方向由右手法则确定(即取上侧),则 Σ 是一个长半轴为$\sqrt{2}$、短半轴为 1 的椭圆. 由 Stokes 公式,

$$\int_L 3z\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+5\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma \left(0-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}S=2\pi.$$

(3) 设 Σ 是 L 所围的平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 的部分,方向由右手法则确定(即取上侧). 由 Stokes 公式,

$$\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=-2\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_\Sigma \frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\mathrm{d}S=-2\pi a(a+h).$$

(4) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的部分,方向由右手法则确定(即取上侧),

则 Σ 是一个边长为$\frac{1}{\sqrt{2}}$的正六边形. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}&\int_L (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz\\&=-2\iint_\Sigma (y+z)\,dydz+(z+x)\,dzdx+(x+y)\,dxdy\\&=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)\,dS=-2\sqrt{3}\iint_\Sigma dS=-\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

(5) 设 $L_1:\begin{cases}x=a,\\y=0,\\z=t\end{cases}(t:0\to h)$,由 Stokes 公式,

$$\int_{L+(-L_1)} (x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz=0,$$

于是

$$\int_L (x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz=\int_0^h z^2\,dz=\frac{1}{3}h^3.$$

(6) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x+y+z=2$ 的部分,方向由右手法则确定(即取上侧). 设 Σ 在 xy 平面的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_{D_{xy}} x\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} y\,dxdy=0$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}&\int_L (y^2-z^2)\,dx+(2z^2-x^2)\,dy+(3x^2-y^2)\,dz\\&=-2\iint_\Sigma (y+2z)\,dydz+(z+3x)\,dzdx+(x+y)\,dxdy\\&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)\,dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x-y+6)\,dS\\&=-2\iint_{D_{xy}} (x-y+6)\,dxdy=-24.\end{aligned}$$

13. 设 $f(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上恒为正值的连续函数,L 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$. 证明

$$\int_L xf(y)\,dy-\frac{y}{f(x)}dx\geqslant 2\pi.$$

证 设 $D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$. 由 Green 公式,

$$\begin{aligned}\int_L xf(y)\,dy-\frac{y}{f(x)}dx&=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\\&=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\geqslant\iint_D 2\,dxdy=2\pi,\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了区域的对称性.

14. 设 D 为两条直线 $y=x,y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1,xy=4$ 所围成的区域,$F(u)$ 是具有连续导数的一元函数,记 $f(u)=F'(u)$. 证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中∂D的方向为逆时针方向.

证　由 Green 公式,得$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 作变换$u=xy,v=\frac{y}{x}$,则此变换将区域$D$变为$D_{uv}=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 4,1\leqslant v\leqslant 4\}$,变换的 Jacobi 行列式为$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}$,于是

$$\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}}\frac{f(u)}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u,$$

所以

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

15. 证明:若Σ为封闭曲面,$\boldsymbol{l}$为一固定向量,则

$$\iint_\Sigma\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}S=0,$$

其中$\boldsymbol{n}$为曲面Σ的单位外法向量.

证　记$\boldsymbol{l}=(a,b,c)$,而$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma),$$

于是由 Gauss 公式,得到

$$\iint_\Sigma\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}\iint_\Sigma a\mathrm{d}y\mathrm{d}z+b\mathrm{d}z\mathrm{d}x+c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

16. 设区域Ω由分片光滑封闭曲面Σ所围成. 证明:

$$\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{1}{2}\iint_\Sigma\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S,$$

其中$\boldsymbol{n}$为曲面Σ的单位外法向量,$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证　由$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\frac{1}{r}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$,可知

$$\iint_\Sigma\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\frac{1}{r}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{x^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{x^2+y^2}{r^3},$$

由 Gauss 公式,得到

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S=\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}.$$

17. 设函数$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在$\mathbf{R}^3$上具有连续偏导数,且对于任意光滑曲面Σ,成立

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$.

证 用反证法．若存在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，使得 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \neq 0$，则不妨设 $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0} > 0$. 由于函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ 连续，所以存在 $r, c > 0$，使得当

$$(x,y,z) \in \Omega = \{(x,y,z) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leqslant r^2\}$$

时成立 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} > c > 0$.

于是由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\geqslant \iiint_{\Omega} c\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi r^3 c > 0,\end{aligned}$$

这就与题设矛盾.

18. 设 L 是平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ 上的简单闭曲线，它所包围的区域 D 的面积为 S，其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是平面取定方向上的单位向量．证明

$$S = \frac{1}{2}\int_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中 L 的定向与平面的定向符合右手定则.

证 由 Stokes 公式，

$$\begin{aligned}&\int_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \int_L (z\cos\beta - y\cos\gamma)\mathrm{d}x + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\mathrm{d}y + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\mathrm{d}z \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta - y\cos\gamma & x\cos\gamma - z\cos\alpha & y\cos\alpha - x\cos\beta \end{vmatrix}\mathrm{d}S \\ &= 2\iint_D (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\mathrm{d}S = 2\iint_D \mathrm{d}S = 2S,\end{aligned}$$

所以

$$S = \frac{1}{2}\int_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

§4　微分形式的外微分

1. 计算下列微分形式的外微分：

(1) 1 - 形式 $\omega = 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$；

(2) 1 - 形式 $\omega = \cos y\mathrm{d}x - \sin x\mathrm{d}y$；

(3) 2 - 形式 $\omega = 6z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

解　(1) $\mathrm{d}\omega = 2y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$.

(2) $\mathrm{d}\omega = -\sin y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - \cos x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (\sin y - \cos x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(3) $\mathrm{d}\omega = 6\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = (x+6)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

2. 设 $\omega = a_1(x_1)\mathrm{d}x_1 + a_2(x_2)\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n(x_n)\mathrm{d}x_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1 - 形式，求 $\mathrm{d}\omega$.

解
$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i'(x_i)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0.$$

3. 设 $\omega = a_1(x_2, x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2(x_1, x_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2 - 形式，求 $\mathrm{d}\omega$.

解　设 $\omega_1 = a_1(x_2, x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$，由于
$$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = 0, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = 0,$$
则有
$$\mathrm{d}\omega_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = 0.$$
类似地，设 $\omega_2 = a_2(x_1, x_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1$，$\omega_3 = a_3(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$，则
$$\mathrm{d}\omega_2 = \mathrm{d}\omega_3 = 0,$$
从而
$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2 + \mathrm{d}\omega_3 = 0.$$

4. 设在 $\mathbf{R}^3$ 上在一个开区域 $\Omega = (a,b) \times (c,d) \times (e,f)$ 上定义了具有连续导数的函数 $a_1(z), a_2(x), a_3(y)$，试求形如
$$\omega = b_1(y)\mathrm{d}x + b_2(z)\mathrm{d}y + b_3(x)\mathrm{d}z$$
的 1 - 形式 ω，使得
$$\mathrm{d}\omega = a_1(z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a_2(x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + a_3(y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

解　由题意，可得
$$b_1'(y) = -a_3(y), b_2'(z) = -a_1(z), b_3'(x) = -a_2(x),$$
所以
$$\omega = -\left(\int a_3(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \left(\int a_1(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y - \left(\int a_2(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z.$$

5. 设 $\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j (a_{ij} = -a_{ji}, i,j = 1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 2 - 形式，证明
$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k.$$

证 因为

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_i,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_i,\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_i = \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k,$$

从而

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k.$$

§5 场论初步

1. 设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k}$，对下列数量场 $f(x,y,z)$，分别计算 **grad** f 和 $\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})$：

(1) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$；

(3) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 (1) $\mathbf{grad}\, f = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$，

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a}) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(3x + 20y - 15z).$$

(2) $\mathbf{grad}\, f = 2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$，

$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a}) = 2(3x + 20y - 15z)$.

(3) $\mathbf{grad}\, f = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$，

$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a}) = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}(3x + 20y - 15z)$.

2. 求向量场 $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ 穿过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的通量，其中球面在这一部分的定向为上侧.

解 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$，方向取上侧，则所求通量为

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于 $\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_{xy}} (1 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}$，

同理可得 $$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8},$$

所以　　$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\pi.$$

3. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, 求:

(1) 满足 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = 0$ 的函数 $f(r)$;

(2) 满足 $\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(r)] = 0$ 的函数 $f(r)$.

解　(1)经计算得到

$$\frac{\partial(f(r)x)}{\partial x} = f(r) + f'(r)\frac{x^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)y)}{\partial y} = f(r) + f'(r)\frac{y^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)z)}{\partial z} = f(r) + f'(r)\frac{z^2}{r},$$

所以

$$\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = 3f(r) + rf'(r).$$

由 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = 0$, 得 $3f(r) + rf'(r) = 0$, 解此微分方程, 得到

$$f(r) = \frac{c}{r^3},$$

其中 c 为任意常数.

(2) 由 $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{x}{r}f'(r)$, $\frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{y}{r}f'(r)$, $\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{z}{r}f'(r)$, 得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}f'(r)\right] = \frac{r^2 - x^2}{r^3}f'(r) + \frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r}f'(r)\right] = \frac{r^2 - y^2}{r^3}f'(r) + \frac{y^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r}f'(r)\right] = \frac{r^2 - z^2}{r^3}f'(r) + \frac{z^2}{r^2}f''(r),$$

所以

$$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(r)] = \frac{2}{r}f'(r) + f''(r).$$

由 $\mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(r)] = 0$, 得 $2f'(r) + rf''(r) = 0$, 解此微分方程, 得到

$$f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

4. 计算

$$\mathbf{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是常矢量, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, 且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r} > 0$.

解　设 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $u = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c_1 + \frac{c_1}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}, \frac{\partial u}{\partial y} = c_2 + \frac{c_2}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}, \frac{\partial u}{\partial z} = c_3 + \frac{c_3}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},$$

所以

$$\mathbf{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

5. 计算向量场 $\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ 沿下列定向曲线的环量：

(1) 圆周 $(x-2)^2+(y-2)^2=1, z=0$，从 z 轴正向看去为逆时针方向；

(2) 圆周 $x^2+y^2=4, z=1$，从 z 轴正向看去为顺时针方向.

解 经计算，可得

$$\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x,0),$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0},$$

它在除去 z 轴的空间上是无旋场.

(1) 设 $L=\{(x,y,z)\mid(x-2)^2+(y-2)^2=1, z=0\}$，从 z 轴正向看去为逆时针方向；$\Sigma=\{(x,y,z)\mid(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 1, z=0\}$，方向取上侧. 由于 z 轴不穿过曲面 Σ，根据 Stokes 公式，

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

(2) 令 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0$，则

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-2\pi.$$

6. 计算向量场 $\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ 在点 $M(1,3,2)$ 处的旋度，以及在这点沿方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的环量面密度.

解 由

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xyz & xyz & xyz\end{vmatrix}=x(z-y)\boldsymbol{i}+y(x-z)\boldsymbol{j}+z(y-x)\boldsymbol{k},$$

可得

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}(M)=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

向量场 $\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ 在点 $M(1,3,2)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度为

$$\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{m(\Sigma)}\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}(M)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{1}{3}.$$

7. 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 向量场，$f(x,y,z)$ 为数量场，证明：(假设函数 a_x, a_y, a_z 和 f 具有必要的连续偏导数)

(1) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a})=0$；

(2) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,f)=\boldsymbol{0}$；

(3) $\mathbf{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{a})-\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$.

证　(1) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y}-\dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z}-\dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

设 a_x,a_y,a_z 二阶偏导数连续，则

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0.$$

(2) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,f)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}.$

(3) 由

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{a})&=\frac{\partial\operatorname{div}\boldsymbol{a}}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\operatorname{div}\boldsymbol{a}}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\operatorname{div}\boldsymbol{a}}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\\&\quad\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

以及

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a})&=\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\\&\quad\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

得到

$$\mathbf{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{a})-\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a})=\Delta a_x\boldsymbol{i}+\Delta a_y\boldsymbol{j}+\Delta a_z\boldsymbol{k}=\Delta\boldsymbol{a}.$$

8. 位于原点的点电荷 q 产生的静电场的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，ε_0 为真空介电常数．求 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}$.

解

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)=-\frac{3yz}{r^4}+\frac{3yz}{r^4}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{3zx}{r^4}+\frac{3zx}{r^4}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{3xy}{r^4}+\frac{3xy}{r^4}=0,$$

所以

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}=\mathbf{0},\quad (x,y,z)\neq\mathbf{0}.$$

9. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，验证：

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$;

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$;

(3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$.

证 (1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=\frac{\partial(a_yz-a_zy)}{\partial x}+\frac{\partial(a_zx-a_xz)}{\partial y}+\frac{\partial(a_xy-a_yx)}{\partial z}=0.$$

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_yz-a_zy & a_zx-a_xz & a_xy-a_yx\end{vmatrix}$

$$=2(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{a}.$$

(3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=\frac{\partial(a_xx^2)}{\partial x}+\frac{\partial(a_yy^2)}{\partial y}+\frac{\partial(a_zz^2)}{\partial z}=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$.

10. 求全微分$(x^2-2yz)\,dx+(y^2-2xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz$的原函数.

解 记$\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$,由于

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=-2x=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=-2y=\frac{\partial a_z}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}=-2z=\frac{\partial a_x}{\partial y},$$

所以向量场$\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$是一个无旋场,其原函数为

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)\,dx+(y^2-2xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz+C\\&=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)\,dz\\&=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.\end{aligned}$$

11. 证明向量场$\boldsymbol{a}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x+y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}(x>0)$是有势场并求势函数.

证 当$x>0$时,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right),$$

所以向量场$\boldsymbol{a}$是有势场,其势函数为

$$\begin{aligned}V(x,y)&=-U(x,y)=-\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2}+C\\&=-\int_1^x\frac{dx}{x}-\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}dy+C=-\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C.\end{aligned}$$

12. 证明向量场$\boldsymbol{a}=(2x+y+z)yz\boldsymbol{i}+(x+2y+z)zx\boldsymbol{j}+(x+y+2z)xy\boldsymbol{k}$是有势场,并求出它的势函数.

证 设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,则

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=x^2+2x(y+z)=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=y^2+2y(x+z)=\frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=z^2+2z(x+y)=\frac{\partial a_x}{\partial y},$$

所以向量场 $\boldsymbol{a}$ 是有势场．设原函数为 $U=U(x,y,z)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U&=(2x+y+z)yz\mathrm{d}x+(x+2y+z)zx\mathrm{d}y+(x+y+2z)xy\mathrm{d}z\\&=[yz\mathrm{d}x^2+x^2(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)]+[y^2(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)+zx\mathrm{d}y^2]+\\&\quad[z^2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+xy\mathrm{d}z^2]\\&=\mathrm{d}(x^2yz)+\mathrm{d}(xy^2z)+\mathrm{d}(xyz^2)=\mathrm{d}[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

所以势函数为

$$V(x,y,z)=-U(x,y,z)=-xyz(x+y+z)+C.$$

13．验证：

（1）$u=y^3-3x^2y$ 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的调和函数；

（2）$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$ 上的调和函数；

（3）$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上的调和函数．

解　（1）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

即 $u=y^3-3x^2y$ 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的调和函数．

（2）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

即 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$ 上的调和函数．

（3）记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}=-\frac{y}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y}{r^4}\frac{y}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}=-\frac{z}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z}{r^4}\frac{z}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z^2}{r^5},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}=0,$$

即 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上的调和函数.

14. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数,证明 u 是调和函数的充要条件为:对于 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线 C,成立 $\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=0$,$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 为沿 C 的外法线方向的方向导数.

证 必要性. 设 C 是 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线,由

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{\tau},y)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{\tau},x),$$

其中 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{\tau}$ 分别是曲线 C 上点 (x,y) 处的单位外法向量和单位切向量,得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_C \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

由 Green 公式,得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

充分性. 如果存在点 $M_0(x_0,y_0)$,使得 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}\neq 0$,不妨设其大于零. 由于 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,所以存在 $\delta>0$,使得在 $D=O(M_0,\delta)$ 上,成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0,$$

于是

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,$$

与条件矛盾,所以 u 是调和函数.

15. 设 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 都为平面上的调和函数. 令 $F=\sqrt{u^2+v^2}$. 证明当 $p\geqslant 2$ 时,在 $F\neq 0$ 的点成立

$$\Delta(F^p)\geqslant 0.$$

证 由

$$\frac{\partial F^p}{\partial x}=pF^{p-1}\frac{uu_x+vv_x}{F}=pF^{p-2}(uu_x+vv_x)$$

和

$$\frac{\partial F^p}{\partial y}=pF^{p-1}\frac{uu_y+vv_y}{F}=pF^{p-2}(uu_y+vv_y),$$

得到

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial x^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_x+vv_x)^2+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx})$$

和

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial y^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_y+vv_y)^2+pF^{p-2}(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}),$$

所以

$$\Delta(F^p)=p(p-2)F^{p-4}[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)\geqslant 0.$$

16. 设 $B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，$\boldsymbol{F}(x,y,z):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为具有连续导数的向量值函数，且满足

$$\boldsymbol{F}\Big|_{\partial B}\equiv(0,0,0),\ \nabla\cdot\boldsymbol{F}\Big|_{B}\equiv 0.$$

证明：对于任何 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数的函数 $g(x,y,z)$ 成立

$$\iiint_B \nabla g\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

证　由 $\nabla\cdot(g\boldsymbol{F})=\nabla g\cdot\boldsymbol{F}+g\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 及 Gauss 公式，得到

$$\begin{aligned}\iiint_B \nabla g\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint_B \nabla\cdot(g\boldsymbol{F})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint_B g\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint_{\partial B} g\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}S-\iiint_B g\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\end{aligned}$$

最后一个等式利用了条件 $\boldsymbol{F}\Big|_{\partial B}\equiv(0,0,0),\ \nabla\cdot\boldsymbol{F}\Big|_{B}\equiv 0.$

17. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$，$u(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上具有连续二阶偏导数．进一步，设 u 在 $\bar{D}$ 上不恒等于零，但在 D 的边界 ∂D 上恒为零，且在 D 上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u\quad(\lambda\text{ 为常数}).$$

证明：

$$\iint_D\|\mathbf{grad}\ u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\iint_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证　由 Green 公式，

$$\int_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于在 ∂D 上 $u(x,y)$ 恒为零，所以 $\int_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=0$．另一方面，在 D 上成立 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u$，所以

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\lambda u^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\iint_D\|\mathbf{grad}\ u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\iint_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

18. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成，$u(x,y,z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数，且在 $\bar{\Omega}$ 上调和，即满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

（1）证明

$$\iint_\Sigma\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量;

(2) 设 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 为一定点,证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

证 (1) 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,由方向导数的计算公式及 Gauss 公式,得到

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

(2) 由于 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=(\mathbf{grad}\ u)\cdot\boldsymbol{n}$,于是

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $P=\dfrac{(x-x_0)u+r^2u_x}{r^3}$, $Q=\dfrac{(y-y_0)u+r^2u_y}{r^3}$, $R=\dfrac{(z-z_0)u+r^2u_z}{r^3}$.

经计算得到

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{xx}}{r},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(y-y_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{yy}}{r},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(z-z_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{zz}}{r},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

现在取一个以 (x_0,y_0,z_0) 为中心,$\delta>0$ 为半径的球面 S_0,使得 $S_0\subset\Omega$,并设 $\boldsymbol{n}$ 为 S_0 的单位外法向量,然后在 Σ 与 S_0 所围的区域 Ω' 上应用 Gauss 公式,得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma+(-S_0)}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega'}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

从而

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_0}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

注意,$r=\delta$ 为常数,$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=1$ 与 $\iint_{S_0}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$,则

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint_{S_0}u(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

利用积分中值定理并令 $\delta\to0$,即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

第十五章
含参变量积分

§1 含参变量的常义积分

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解 (1) 由积分中值定理，可得

$$\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}+\int_1^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}\quad(\xi\text{在}1\text{与}1+\alpha\text{之间}),$$

于是

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 由连续性定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

2. 设$f(x,y)$当y固定时，关于x在$[a,b]$上连续，且当$y\to y_0^-$时，它关于y单调增加地趋于连续函数$\varphi(x)$，证明

$$\lim_{y\to y_0^-}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 若能证明$\lim\limits_{y\to y_0^-}f(x,y)=\varphi(x)$关于$x\in[a,b]$是一致的，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall y\in(y_0-\delta,y_0),\forall x\in[a,b]:|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$，则

$$\left|\int_a^b (f(x,y)-\varphi(x))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x,y)-\varphi(x)|\mathrm{d}x < (b-a)\varepsilon,$$

就有

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

以下用反证法证明 $\lim\limits_{y\to y_0-} f(x,y)=\varphi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的.

若不然,则 $\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists y\in(y_0-\delta,y_0), \exists x\in[a,b]$:

$$|f(x,y)-\varphi(x)| \geqslant \varepsilon_0.$$

依次取 $\delta_1=1, \exists y_1\in(y_0-\delta_1,y_0), \exists x_1\in[a,b]: |f(x_1,y_1)-\varphi(x_1)|\geqslant\varepsilon_0$;

$$\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2},y_0-y_1\right\}, \exists y_2\in(y_0-\delta_2,y_0), \exists x_2\in[a,b], |f(x_2,y_2)-\varphi(x_2)|\geqslant\varepsilon_0;$$

$$\cdots$$

$$\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n},y_0-y_{n-1}\right\}, \exists y_n\in(y_0-\delta_n,y_0), \exists x_n\in[a,b], |f(x_n,y_n)-\varphi(x_n)|\geqslant\varepsilon_0;$$

$$\cdots$$

由此得到两列数列 $\{x_n\},\{y_n\}$. 由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有界,由 Bolzano - Weierstrass 定理,存在收敛子列 $\{x_{n_k}\},\{y_{n_k}\}$,为叙述方便,仍记这两个子列为 $\{x_n\},\{y_n\}$,其中 $\{y_n\}$ 是递增的,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

由 $f(\xi,y)\to\varphi(\xi)(y\to y_0-)$,可知 $\exists\delta>0, \forall y(-\delta<y-y_0<0)$:

$$|f(\xi,y)-\varphi(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

注意,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$,取足够大的 K 使得 $-\delta<y_K-y_0<0$,从而

$$|f(\xi,y_K)-\varphi(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

又 $f(x,y_K)-\varphi(x)$ 在 $x=\xi$ 点连续以及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi, \exists N>0$,当 $n>N$ 时,成立

$$|(f(x_n,y_K)-\varphi(x_n))-(f(\xi,y_K)-\varphi(\xi))|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

于是

$$|f(x_n,y_K)-\varphi(x_n)|<\varepsilon_0.$$

但是对固定的 x_n,当 $y\to y_0-$ 时,$f(x_n,y)$ 关于 y 单调递增地趋于 $\varphi(x_n)$,所以当 $n>\max\{N,K\}$ 时,成立

$$|f(x_n,y_n)-\varphi(x_n)|\leqslant|f(x_n,y_K)-\varphi(x_n)|<\varepsilon_0,$$

这与 $|f(x_n,y_n)-\varphi(x_n)|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$ 矛盾.

3. 用交换积分顺序的方法计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x(b>a>0)$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}(1>a>0)$.

解 (1) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{y+1}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{1+(y+1)^2},$$

所以

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2} = \arctan(1+b) - \arctan(1+a).$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2\sin^2 x}$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1-y^2\sin^2 x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1-y^2\sin^2 x} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\cot x}{\cot^2 x + 1 - y^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{\cot x}{\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1-y^2}},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \pi\int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pi\arcsin a.$$

4. 求下列函数的导数：

(1) $I(y) = \int_y^{y^2} \mathrm{e}^{-x^2 y}\mathrm{d}x$；

(2) $I(y) = \int_y^{y^2} \frac{\cos xy}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $F(t) = \int_0^{t^2} \mathrm{d}x \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y.$

解　(1) $I'(y) = 2y\mathrm{e}^{-y^5} - \mathrm{e}^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 \mathrm{e}^{-x^2 y}\mathrm{d}x.$

(2) $I'(y) = \frac{2\cos y^3 - \cos y^2}{y} - \int_y^{y^2} \sin(xy)\,\mathrm{d}x = \frac{3\cos y^3 - 2\cos y^2}{y}.$

(3) 设 $g(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y$，则

$$g_t(x,t) = -2t\int_{x-t}^{x+t} \cos(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y + \sin(2x^2+2xt) + \sin(2x^2-2xt),$$

所以

$$F'(t)=\int_0^{t^2} g_t(x,t)\,dx+2tg(t^2,t)$$
$$=-2t\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\,dy+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xt\,dx+$$
$$2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4-t^2+y^2)\,dy.$$

5. 设 $I(y)=\int_0^y (x+y)f(x)\,dx$,其中 f 为可微函数,求 $I''(y)$.

解
$$I'(y)=2yf(y)+\int_0^y f(x)\,dx,$$
$$I''(y)=3f(y)+2yf'(y).$$

6. 设 $F(y)=\int_a^b f(x)\,|y-x|\,dx(a<b)$,其中 $f(x)$ 为可微函数,求 $F''(y)$.

解 当 $y\leqslant a$ 时,$F(y)=\int_a^b f(x)(x-y)\,dx$,于是
$$F'(y)=-\int_a^b f(x)\,dx,F''(y)=0;$$
当 $y\geqslant b$ 时,$F(y)=\int_a^b f(x)(y-x)\,dx$,于是
$$F'(y)=\int_a^b f(x)\,dx,F''(y)=0;$$
当 $a<y<b$ 时,$F(y)=\int_a^y f(x)(y-x)\,dx+\int_y^b f(x)(x-y)\,dx$,于是
$$F'(y)=\int_a^y f(x)\,dx-\int_y^b f(x)\,dx,F''(y)=2f(y).$$

7. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$F(x)$ 是可导的,证明函数
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)\,dy$$
满足弦振动方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
以及初值条件 $u(x,0)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$.

证 直接计算,可得
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2a}[aF(x+at)+aF(x-at)],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2a}[F(x+at)-F(x-at)],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$
所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

且显然成立 $u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x)$.

8. 利用积分号下求导法计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)\,dx \quad (a > 1)$；

(2) $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx \quad (|\alpha| < 1)$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\,dx$.

解　(1) 设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)\,dx$，则

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2\cot^2 x + a^2 - 1}d\cot x$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

于是

$$I(a) = \pi\ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C.$$

令 $a \to 1+$，则

$$C = I(1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = -\pi\ln 2,$$

所以

$$I(a) = \pi\ln\frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}.$$

(2) 设 $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$，则 $I(0) = 0$. 设 $\alpha \neq 0$，由于

$$I'(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{2\alpha - 2\cos x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}dx,$$

作变换 $t = \tan\frac{x}{2}$，得到

$$I'(\alpha) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\alpha - 1 + (\alpha+1)t^2}{[(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 t^2](1+t^2)}dt$$

$$= \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} + 2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 t^2}$$

$$= \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}t\right)}{1 + \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 t^2} = 0,$$

所以 $I(\alpha) = C$，再由 $I(0) = 0$，得到

$$I(\alpha) = 0 \quad (|\alpha| < 1).$$

(3) 设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$,且不妨设 $a>0,b>0$.

当 $a=b$ 时,$I(a)=\pi\ln|a|$. 以下设 $a\neq b$.

由于

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx,$$

记

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx,B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx,$$

则

$$a^2A+b^2B=\frac{\pi}{2},$$

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{a^2\tan^2x+b^2}$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2ab}.$$

由此解得

$$A=\frac{\pi}{2}\frac{1}{a(a+b)},$$

于是

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b},$$

积分后得到

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C.$$

由 $I(0)=\pi\ln\frac{b}{2}$,得到 $C=-\pi\ln 2$,从而 $I(a)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$,或者一般地有

$$I(a)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

9. 证明:第二类椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2t}dt\qquad(0<k<1)$$

满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

证 直接计算,有

$$E'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k\sin^2t}{\sqrt{1-k^2\sin^2t}}dt,$$

$$E''(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t}{\sqrt{1-k^2\sin^2t}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^4t}{(1-k^2\sin^2t)^{\frac{3}{2}}}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t}{(1-k^2\sin^2t)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{k^2\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{k^2(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t,$$

于是

$$E''(k) = \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} - \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sin t$$

$$= \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} - \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}\frac{\sin t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$= \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} - \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\mathrm{d}t,$$

所以

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} - \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(k^2-1)\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\mathrm{d}t + \frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\mathrm{d}t + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

10. 设函数 $f(u,v)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数. 证明:函数

$$w(x,y,z) = \int_0^{2\pi} f(x + z\cos\varphi, y + z\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

满足偏微分方程

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

证　由直接计算,可得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_0^{2\pi} f_u \mathrm{d}\varphi, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \int_0^{2\pi} f_{uu}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_0^{2\pi} f_v \mathrm{d}\varphi, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \int_0^{2\pi} f_{vv}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \int_0^{2\pi} (f_u\cos\varphi + f_v\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \int_0^{2\pi} (f_{uu}\cos^2\varphi + f_{uv}\sin 2\varphi + f_{vv}\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

于是

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = z\int_0^{2\pi} (f_{uu}\sin^2\varphi - f_{uv}\sin 2\varphi + f_{vv}\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

另一方面,由分部积分可得

$$\int_0^{2\pi} f_u\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{2\pi} [f_{uu}(-z\sin\varphi) + f_{uv}z\cos\varphi]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} f_v\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} [f_{vu}(-z\sin\varphi) + f_{vv}z\cos\varphi]\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}.$$

11. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$. 研究函数

$$I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

的连续性.

解 设 $y_0\neq 0$，由于$\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$在$[0,1]\times\left[y_0-\frac{|y_0|}{2},y_0+\frac{|y_0|}{2}\right]$上连续，可知$I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$在$y_0\neq 0$处连续.

设$y_0=0$，则$I(y_0)=I(0)=0$. 由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$，所以$f(x)$在$[0,1]$上的最小值$m>0$，当$y>0$时，成立$\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\geqslant\frac{my}{x^2+y^2}$，于是

$$I(y)\geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y},$$

由$\lim\limits_{y\to 0+}\left(m\arctan\frac{1}{y}\right)=\frac{m\pi}{2}>0$，可知$\lim\limits_{y\to 0+}I(y)\neq 0=I(0)$，即$I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$在$y_0=0$处不连续.

注 在本题中可证明$\lim\limits_{y\to 0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$与$\lim\limits_{y\to 0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$，其中$f(0)\neq 0$，由此也说明了$I(y)$在$y=0$点不连续. 证明如下：

$\forall\varepsilon>0$，取$\eta>0$，使得当$0<x<\eta$时，$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，则

$$\left|\int_0^\eta \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对固定的$\eta>0$，取$\delta>0$，使得当$0<|y|<\delta$时，$\left|\int_\eta^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$\left|\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

分别令$y\to 0+$与$y\to 0-$，由

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0),\ \lim_{y\to 0-}\int_0^\eta \frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}f(0)$$

和ε的任意性，即可得到$\lim\limits_{y\to 0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$与$\lim\limits_{y\to 0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$.

§2 含参变量的反常积分

1. 证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x,y\geqslant a>0$；

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+\alpha} e^{-\alpha x} dx, 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$;

(3) $\int_0^{+\infty} x \sin x^4 \cos \alpha x dx, a \leqslant \alpha \leqslant b$.

解　(1) 因为 $\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+a^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx$ 收敛, 所以由 Weierstrass 判别法, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2+y^2} dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) $\left|\int_0^A \sin 2x dx\right| \leqslant 1$, 即 $\int_0^A \sin 2x dx$ 关于 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致有界; $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 x 单调, 且由 $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, 可知当 $x \to +\infty$ 时, $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 一致趋于零. 于是由 Dirichlet 判别法, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+\alpha} e^{-\alpha x} dx$ 在 $\alpha \in [0, \alpha_0]$ 上一致收敛.

(3) 由分部积分法,

$$\int_A^{+\infty} x \sin x^4 \cos \alpha x dx = -\frac{1}{4} \int_A^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2} d\cos x^4$$

$$= -\frac{\cos \alpha x \cos x^4}{4x^2}\Big|_A^{+\infty} - \frac{1}{4} \int_A^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x \cos x^4}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \cos x^4}{x^3} dx,$$

其中

$$\left|\frac{\cos \alpha x \cos x}{x^2}\Big|_A^{+\infty}\right| \leqslant \frac{1}{A^2};$$

再由 $\left|\frac{\alpha \sin \alpha x \cos x^4}{x^2}\right| \leqslant \frac{\max\{|a|, |b|\}}{x^2}$ 及 $\left|\frac{\cos \alpha x \cos x^4}{x^3}\right| \leqslant \frac{1}{x^3}$, 可得到

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x \cos x^4}{x^2} dx\right| \leqslant \max\{|a|, |b|\} \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\max\{|a|, |b|\}}{A}$$

与

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \cos x^4}{x^3} dx\right| \leqslant \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2A^2}.$$

当 $A \to +\infty$ 时, 上述三式关于 α 在 $[a, b]$ 上一致趋于零, 所以原积分关于 α 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

2. 说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx, 0 < \alpha < +\infty$;

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx, 0 < \alpha < 2$.

解　(1) 取 $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{18} > 0$, $\forall A_0 > 0$, 取 $A' = \frac{n\pi}{4} > A_0$, $A'' = \frac{3n\pi}{4}$, $\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n}$, 则当 n 充分大时,

$$\left|\int_{A'}^{A''} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx\right| = \int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}} \frac{x \sin \alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)} dx \geqslant \frac{\sqrt{2} n^2 \pi^2}{16\left(1+\left(\frac{3n\pi}{4}\right)^2\right)} > \frac{\sqrt{2}}{18} = \varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(2) 作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t\mathrm{d}t.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi>0$，$\forall A_0>0$，取 $A'=2n\pi+\frac{\pi}{4}>A_0$，$A''=2n\pi+\frac{3\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=2-\frac{1}{n}$，则当 n 充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t\mathrm{d}t\right|=\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{t^{2-\alpha_n}}\sin t\mathrm{d}t\geqslant\frac{\sqrt{2}\pi}{4\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{1}{n}}}>\frac{\sqrt{2}}{8}\pi=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,2)$ 上不一致收敛.

3. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 上连续，反常积分 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 当 $\lambda=a$ 与 $\lambda=b$ 时都收敛，证明 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 将反常积分 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 写成

$$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1t^{\lambda-a}[t^af(t)]\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^bf(t)]\mathrm{d}t.$$

对于 $\int_0^1t^{\lambda-a}[t^af(t)]\mathrm{d}t$，因为 $\int_0^1t^af(t)\mathrm{d}t$ 收敛，从而关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$t^{\lambda-a}$ 是 t 的单调函数，且 $|t^{\lambda-a}|\leqslant1$，即 $t^{\lambda-a}$ 在 $t\in[0,1]$ 上关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致有界，由 Abel 判别法，可知 $\int_0^1t^{\lambda-a}[t^af(t)]\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

对于 $\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^bf(t)]\mathrm{d}t$，因为 $\int_1^{+\infty}t^bf(t)\mathrm{d}t$ 收敛，从而关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$t^{\lambda-b}$ 是 t 的单调函数，且 $|t^{\lambda-b}|\leqslant1$，即 $t^{\lambda-b}$ 在 $t\in[1,+\infty)$ 上关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致有界，由 Abel 判别法，可知 $\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^bf(t)]\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

所以 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，在 $y\geqslant y_0>0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$，在(i) $a<\alpha<b$；(ii) $-\infty<\alpha<+\infty$；

(3) $\int_0^1x^{p-1}\ln^2x\mathrm{d}x$，在(i) $p\geqslant p_0>0$；(ii) $p>0$；

(4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$，在(i) $\alpha\geqslant\alpha_0>0$；(ii) $\alpha>0$.

解　(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

对于 $\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，由于 $\left|\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，可知 $\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 关于 y 一致收敛.

对于 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，由于 $\left|\int_1^A\cos xy\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{y_0}$，即 $\int_1^A\cos xy\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致有界，以及 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x}}$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致趋于零，由 Dirichlet 判别法，可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致收敛，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致收敛.

(2) (i) 当 $a<\alpha<b$ 时，取 $A>0$，使 $(a,b)\subset[-A,A]$，则 $\forall\,|x|\geqslant A$，$|\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}|\leqslant\mathrm{e}^{-(|x|-A)^2}$，而 $\int_{-\infty}^{-A}\mathrm{e}^{-(|x|-A)^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(|x|-A)^2}\mathrm{d}x$ 收敛，由Weierstrass判别法的证明，可知反常积分 $\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(a,b)$ 上一致收敛，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(a,b)$ 上一致收敛.

(ii) 当 $-\infty<\alpha<+\infty$ 时，对于 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{\mathrm{e}}>0$，$\forall A_0>0$，取 $A'=n>A_0$，$A''=n+1$，$\alpha=\alpha_n=n$，则当 n 充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x\right|=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-(x-\alpha_n)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\frac{1}{\mathrm{e}}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛. 同理 $\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上也不一致收敛，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

(3) (i) 当 $p\geqslant p_0>0$ 时，$|x^{p-1}\ln^2x|\leqslant x^{p_0-1}\ln^2x$，而 $\int_0^1x^{p_0-1}\ln^2x\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\int_0^1x^{p-1}\ln^2x\mathrm{d}x$ 在 $p\in[p_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(ii) 当 $p>0$ 时，取 $p_n=\frac{1}{n}>0$，由于

$$\left|\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}x^{p_n-1}\ln^2x\mathrm{d}x\right|\geqslant\ln^2\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x=n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)\ln^2\frac{1}{n}\to+\infty\ (p\to0+),$$

由 Cauchy 收敛准则，可知 $\int_0^1x^{p-1}\ln^2x\mathrm{d}x$ 在 $p\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(4) (i) 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时，$|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha_0x}(x\geqslant0)$，而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0x}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weier-

strass 判别法，$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(ii) 当 $\alpha>0$ 时，取 $\varepsilon_0=2e^{-\pi}$，$\forall A>0$，取 $A'=n\pi>A$，$A''=(n+1)\pi$，$\alpha=\alpha_n=\frac{1}{n+1}$，则当 n 充分大时，

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\alpha_n x}\sin x\mathrm{d}x\right|\geqslant 2e^{-\pi}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

5. 证明：函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

证 任取 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，$\left|\int_1^A\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，即 $\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[a,b]$ 一致有界；$\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 x 单调，且 $\forall\alpha\in[a,b]$ 成立 $\frac{1}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{x^a}$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha\in[a,b]$ 一致趋于零. 由 Dirichlet 判别法，可知 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[a,b]$ 上一致收敛，从而 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 a,b 的任意性，即知 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

6. 确定函数 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 的连续范围.

解 函数 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 的定义域为 $(0,2)$. 下面我们证明 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $(0,2)$ 上内闭一致收敛，即 $\forall\eta>0$，$F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛，从而得到 $F(y)$ 在 $(0,2)$ 上的连续性.

由于积分有两个奇点，所以将 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 写成 $F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x=F_1(y)+F_2(y)$.

当 $x\in(0,1)$，$y\leqslant 2-\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\leqslant\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}$，而 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_1(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛.

当 $x\in(\pi-1,\pi)$，$y\geqslant\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\leqslant\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-y}}$，而 $\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_2(y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛.

所以 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛.

7. 设 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 存在．证明：$f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)\,dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续．

证　由于 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，即关于 s 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，e^{-sx} 关于 x 单调，且 $|e^{-sx}|\leqslant 1$，即 e^{-sx} 在 $x\in[0,+\infty)$，$s\in[0,+\infty)$ 上一致有界，由 Abel 判别法，$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)\,dx$ 在 $s\in[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而 $F(s)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续．

8. 证明：函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微．

证　首先反常积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 对任意 $t\in(-\infty,+\infty)$ 收敛．其次有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\right]dx=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\cos x\,dx.$$

任取 $[a,b]$，$\forall A>0$，$\left|\int_0^A\cos x\,dx\right|\leqslant 2$，即 $\int_0^A\cos x\,dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致有界；记 $c=\max\{|a|,|b|\}$，当 $x>c$，$t\in[a,b]$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 x 单调，且 $\left|\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-c)^2}$，即当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致趋于零．由 Dirichlet 判别法，可知 $-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\cos x\,dx$ 在 $t\in[a,b]$ 上一致收敛，所以 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $t\in[a,b]$ 上可微，且有

$$I'(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)\cos x}{[1+(x+t)^2]^2}dx.$$

由 a,b 的任意性，即知 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微．

9. 利用 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$，计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\ (b>a>0)$．

解　当 $y\in[a,b]$ 时，$|e^{-xy}|\leqslant e^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛，所以 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

10. 利用 $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\,dy$，计算 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx\quad(p>0,b>a>0)$．

解　当 $y\in[a,b]$ 时，$\left|\int_0^A\cos xy\,dx\right|\leqslant\frac{2}{a}$，即 $\int_0^A\cos xy\,dx$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致有界；e^{-px} 关于 x 单调，且当 $x\to+\infty$ 时，e^{-px} 关于 y 一致趋于零．由 Dirichlet 判别法，

$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\,dx$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}dx\int_a^b \cos(xy)\,dy$$
$$= \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(xy)\,dx.$$

利用分部积分，

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(xy)\,dx = \frac{p}{p^2+y^2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx = \int_a^b \frac{p}{p^2+y^2}dy = \arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

11. 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}(a>0)$，计算 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$（$n$ 为正整数）.

解 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$ 对一切 $a\in(0,+\infty)$ 收敛，$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{-dx}{(a+x^2)^2}$ 关于 a 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$ 在 $a\in(0,+\infty)$ 上可微且成立

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^2},$$

所以

$$I_2=-\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right).$$

同理上述积分仍可在积分号下求导，并可不断进行下去．由

$$\frac{d^n}{da^n}(a^{-\frac{1}{2}})=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^{-\frac{1}{2}-n}$$

与

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{(a+x^2)^{n+1}},$$

即可得到

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}a^{-\frac{2n+1}{2}}\pi.$$

12. 计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

解 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\arctan\alpha x\,d\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_1^{+\infty}\frac{\alpha\sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2x^2)}dx.$

在最后一个积分中，令 $t=\sqrt{x^2-1}$，则

$$g(\alpha)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t^2}{(1+t^2)(1+\alpha^2+\alpha^2t^2)}dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\alpha\int_0^{+\infty}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left[\,|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2}\,\right].$$

13. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0).$$

证　设$A''>A'>0$，

$$\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{aA'}^{aA''}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{bA'}^{bA''}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{aA'}^{bA'}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aA''}^{bA''}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\ln\frac{b}{a},$$

最后一个等式利用了积分中值定理，其中ξ_1在aA'与bA'之间，ξ_2在aA''与bA''之间．令$A'\to0+$，$A''\to+\infty$，则$\xi_1\to0$，$\xi_2\to+\infty$，由$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

14. (1) 利用$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$推出$L(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2c}(c>0)$；

(2) 利用积分号下求导的方法引出$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}c}=-2L$，以此推出与(1)同样的结果，并计算$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}\mathrm{d}y(a>0,b>0)$.

解　(1) 令$y=\frac{c}{t}$，则

$$L(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}\frac{c}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\frac{c}{y^2}\mathrm{d}y,$$

于是

$$2L(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\left(1+\frac{c}{y^2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(y-\frac{c}{y}\right)^2-2c}\mathrm{d}\left(y-\frac{c}{y}\right).$$

再令$y-\frac{c}{y}=x$，得到

$$L(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{-2c}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2c}.$$

(2) 利用积分号下求导，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}c}=-2c\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y=-2L,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}L}{L}=-2\mathrm{d}c,$$

对等式两边积分,得到

$$L(c)=L_0\mathrm{e}^{-2c},$$

注意到 $L(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,所以

$$L(c)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2c}.$$

令 $t=\sqrt{a}y$,得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{ab}{t^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}.$$

15. 利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(\alpha^2+x^2)}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha^2+x^2}$,计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0)$.

解 首先有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos\beta x\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(\alpha^2+x^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(\alpha^2+x^2)}\cos\beta x\mathrm{d}x.$$

利用例 15.2.8 的结果

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2},$$

可得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\cos\beta x\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\cos\left(2\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\sqrt{t}x\right)\mathrm{d}(\sqrt{t}x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

于是

$$J=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(t\alpha^2+\frac{\beta^2}{4t}\right)}\mathrm{d}\sqrt{t}=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\beta|},$$

其中最后一个等式利用了上题的结论.

§3 Euler 积分

1. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}$;

(3) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}(n>1)$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x(n>m>0)$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7x\cos^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x(m,n>0)$;　　(8) $\int_0^1x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}\mathrm{d}x(p,q,n>0)$.

解　(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$

$$= \frac{1}{8}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

(2) 作变换 $\sqrt{t} = \frac{1-\cos x}{2}$，则

$$x = 2\arcsin t^{\frac{1}{4}},\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t^{\frac{1}{2}}}},\ 3-\cos x = 2(1+t^{\frac{1}{2}}),$$

于是

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$$

(3) 作变换 $t = x^n$，则

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

(4) 作变换 $x^{\frac{n}{2}} = \tan\theta$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{2m}{n}-1}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2m}{n}-1}\theta\cos^{1-\frac{2m}{n}}\theta\mathrm{d}\theta,$$

再作变换 $t = \sin^2\theta$，得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1}(1-t)^{-\frac{m}{n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

(5) 作变换 $t = \frac{x}{1+x}$，则

$$x = \frac{t}{1-t},\ \mathrm{d}x = \frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(6) 作变换 $t = \sin^2 x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(4+\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{3!}{2\times\frac{15}{4}\times\frac{11}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{3}{4}} = \frac{256}{1\,155}.$$

(7) 作变换 $t = x^n$，则

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

(8) 作变换 $t = x^n$,则

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{p}{n}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{p}{n},q\right).$$

2. 证明: $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ (n 为正整数),并推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = 1$.

证 令 $t = x^n$,则

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

利用 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 以及 Γ 函数的连续性,得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \lim_{n\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right) = \Gamma(1) = 1.$$

3. 证明: $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导,且 $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$. 进一步证明

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx \quad (n\geqslant 1).$$

证 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$. 任意取 $0<s_0<S_0<+\infty$.

当 $s\geqslant s_0, x\in(0,1]$ 时, $|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{s_0-1}|\ln x|$,而 $\int_0^1 x^{s_0-1}|\ln x|dx$ 收敛,所以 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在 $s\geqslant s_0$ 上一致收敛;

当 $s\leqslant S_0, x\in[1,+\infty)$ 时, $|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{S_0}e^{-x}$,而 $\int_1^{+\infty} x^{S_0}e^{-x}dx$ 收敛,所以 $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在 $s\leqslant S_0$ 上一致收敛.

这说明 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 关于 s 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛. 于是 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导,且 $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$.

进一步,若 $\Gamma^{(n-1)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^{n-1}dx$,类似于上述的论证过程,可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^{n-1}]dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛,故 $\Gamma^{(n-1)}(s)$ 在 $s>0$ 上可导,且 $\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$.

4. 证明 $\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s) = +\infty$.

证 首先易知 $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. 由于 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导,由 Rolle 定理,可知 $\exists x_0\in(1,2)$,使 $\Gamma'(x_0) = 0$.

由上题, $\Gamma''(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln^2 x dx > 0$,于是在 $(x_0,+\infty)$ 上 $\Gamma'(s)>0$,因此 $\Gamma(s)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调增加. 再由 $\Gamma([s])\leqslant\Gamma(s)\leqslant\Gamma([s]+1)(s>x_0)$ 以及 $\Gamma(n+1) =$

$n! \to +\infty$，得到

$$\lim_{s \to +\infty} \Gamma(s) = +\infty.$$

5. 计算 $\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx$.

解　作变换 $x = 1 - t$，则

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t)\,dt = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x)\,dx,$$

相加后利用余元公式，即得到

$$2\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\,dx = \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi x)\,dx.$$

再由

$$\int_0^1 \ln \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln \sin u du = -\ln 2,$$

得到

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx = \ln \sqrt{2\pi}.$$

6. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$. 确定正数 p，使得反常重积分

$$I = \iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p}$$

收敛. 并在收敛时，计算 I 的值.

解　利用球坐标变换，可得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} = 4\pi \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p}.$$

由此可知当 $p < 1$ 时，反常重积分 $I = \iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p}$ 收敛. 且当 $p < 1$ 时，

$$I = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr^2}{(1-r^2)^p} = 2\pi \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p} dt = 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

7. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$. 确定正数 α, β, γ，使得反常重积分

$$I = \iiint_\Omega \frac{dxdydz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}$$

收敛. 并在收敛时，计算 I 的值.

解　作变换 $\begin{cases} x = u^{\frac{2}{\alpha}}, \\ y = v^{\frac{2}{\beta}}, \\ z = w^{\frac{2}{\gamma}}, \end{cases}$ 则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_{\Omega'} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1 + u^2 + v^2 + w^2} du dv dw,$$

其中 $\Omega' = \{(u,v,w) \mid u \geqslant 0, v \geqslant 0, w \geqslant 0\}$.

再令 $\begin{cases} u = r\sin\varphi\cos\theta, \\ v = r\sin\varphi\sin\theta, \\ w = r\cos\varphi, \end{cases}$ 则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r.$$

对于上式中所包含的前两个积分，有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{\frac{1}{\beta}-1}\theta(\cos^2\theta)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta\mathrm{d}\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right); \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right).$$

对于第三个积分，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r + \int_1^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r.$$

因为 $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1 > -1$，所以积分 $\int_0^1 \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 收敛，而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 当且仅当 $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1 < 1$ 即 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1$ 时收敛．所以当 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} < 1$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 收敛，从而原积分收敛．

这时作变量代换 $r^2 = t$，得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right).$$

所以
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

注 对积分 $\int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$，也可令 $r = \tan\theta$，同样得到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}(\cos\theta)^{1-\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\gamma}}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

8. 计算

$$I = \iint_D x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由三条直线 $x=0,y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域，m,n,p 均为大于 0 的正数.

解　作变换 $\begin{cases} u=x+y, \\ v=\dfrac{y}{x+y}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x=u(1-v), \\ y=uv, \end{cases}$ 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$，该变换将区域 D 映照成正方形：

$$\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant 1\}.$$

于是

$$I=\int_0^1 u^{m+n-1}(1-u)^{p-1}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{m-1}\mathrm{d}v=\mathrm{B}(m+n,p)\mathrm{B}(n,m)$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}.$$

注　当 $p>1$ 时也可以有如下解法：

将积分化成

$$I=(p-1)\iiint_{\Omega}x^{m-1}y^{n-1}z^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 与 $x+y+z=1$ 所围的区域.

再令 $\begin{cases} x=u^2, \\ y=v^2, \\ z=w^2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} u=r\sin\varphi\cos\theta, \\ v=r\sin\varphi\sin\theta, \\ w=r\cos\varphi \end{cases}$ 就得到

$$I=8(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}\mathrm{d}r,$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{n-1}(1-\sin^2\theta)^{m-1}\mathrm{d}\sin^2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,m),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi)^{m+n-1}(1-\sin^2\varphi)^{p-2}\mathrm{d}\sin^2\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}(m+n,p-1),$$

$$\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}\mathrm{d}r=\frac{1}{2(m+n+p-1)},$$

于是

$$I=\frac{p-1}{m+n+p-1}\mathrm{B}(n,m)\mathrm{B}(m+n,p-1)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}.$$

9. 证明 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(|\alpha|<1)$.

证 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{-\alpha}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

10. 设 $0<\alpha<2,0<k<1$,证明:

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}.$$

证 作变量代换 $t=\tan\frac{\varphi}{2}$,则

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+k\cos\varphi}=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}{(1+k)+(1-k)t^2},$$

再作变量代换 $\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}t=\tan\theta$,则

$$2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}{(1+k)+(1-k)t^2}=\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha-1}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{1-\alpha}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi},$$

这里最后一个等式利用了余元公式. 所以

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}.$$

11. 设 $0\leqslant h<1$,正整数 $n\geqslant 3$. 证明

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h.$$

证 作变量代换 $t=hu$,则

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t=h\int_0^1(1-h^2u^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u\geqslant h\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u,$$

再作变量代换 $u=\sin\theta$,得到

$$h\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u = h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta \mathrm{d}\theta = \frac{h}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right).$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h.$$

所以

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h.$$

第十六章 Fourier 级数

§1 函数的 Fourier 级数展开

1. 设交流电的变化规律为 $E(t)=A\sin \omega t$,将它转变为直流电的整流过程有两种类型:

(1) 半波整流(见图 16.1.1(a))

$$f_1(t)=\frac{A}{2}(\sin \omega t+|\sin \omega t|);$$

(2) 全波整流(见图 16.1.1(b))

$$f_2(t)=A|\sin \omega t|;$$

现取 $\omega=1$,试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数.



(a)



(b)

图 16.1.1

解 (1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\mathrm{d}x=\frac{2A}{\pi}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2A}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,4,6,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,3,5,\cdots);$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{A}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

$$f_1(x)\sim\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin x-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{4A}{\pi}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{4A}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,4,6,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,3,5,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f_2(x)\sim\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

2. 将下列函数在$[-\pi,\pi]$上展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$；　　(2) $f(x)=|\cos x|$；

(3) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi^2$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x\in[0,\pi);\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}ax, & x\in[-\pi,0),\\ bx, & x\in[0,\pi).\end{cases}$

解　(1) $f(x)$为奇函数，所以 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

(2) $f(x)$为偶函数，所以 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{4(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,4,6,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,3,5,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

(3) $f(x)$为偶函数，所以 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim-\frac{5}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

(4) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\cos(n\pi)}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

(5) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi(b-a)}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(a-b)(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{(a+b)\cos(n\pi)}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim-\frac{(a-b)\pi}{4}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

3. 将下列函数展开成正弦级数：

(1) $f(x)=\pi+x,x\in[0,\pi]$；　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-2x},x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\\ \pi & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right];\end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

解　(1) $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1-2(-1)^n}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$

$$f(x)\sim2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx.$$

(2) $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2n[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-2\pi}]}{\pi(4+n^2)}\quad(n=1,2,3,\cdots).$

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-2\pi}]}{n^2+4}\sin nx.$$

(3) $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-2\left[n\pi(-1)^n-2\sin\frac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx.$$

(4) $b_1=\frac{2}{2}\int_0^{2}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi},$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^{2}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2\left(n-\sin\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}x.$$

4. 将下列函数展开成余弦级数：

(1) $f(x)=x(\pi-x),x\in[0,\pi]$；　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{x},x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\\ 1, & x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right];\end{cases}$　(4) $f(x)=x-\frac{\pi}{2}+\left|x-\frac{\pi}{2}\right|,x\in[0,\pi].$

解　(1) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}.$$

(2) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi}-1)$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2[\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n-1]}{\pi(1+n^2)}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi}-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1]}{n^2+1}\cos nx.$$

(3) $a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2+\pi}{\pi}$,

$$a_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi(n^2-1)n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-n\right)\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

$$f(x)\sim\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\cos 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos 2nx.$$

(4) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{n^2}\cos nx.$$

5. 求定义在任意一个长度为2π的区间$[a,a+2\pi]$上的函数$f(x)$的Fourier级数及其系数的计算公式.

解　设$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\cos mx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\cos mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x+b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_m\pi\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin mx\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\sin mx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\sin mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\sin mx\mathrm{d}x+b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x\right)$$

$$=b_m\pi\quad(m=1,2,\cdots),$$

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

6. 将下列函数在指定区间展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},x\in[0,2\pi]$；　　(2) $f(x)=x^2,x\in[0,2\pi]$；

(3) $f(x)=x,x\in[0,1]$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{3x}, & x\in[-1,0),\\ 0 & x\in[0,1);\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}C, & x\in[-T,0)\\ 0, & x\in[0,T)\end{cases}$（$C$ 是常数）.

解　(1) $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}\pi^2$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{4\pi}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx\right).$$

(3) $a_0=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi nx.$$

(4) $a_0=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3})$,

$$a_n=\int_{-1}^1 f(x)\cos\pi nx\mathrm{d}x=\frac{3}{9+n^2\pi^2}[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-3}]\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\int_{-1}^1 f(x)\sin\pi nx\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{9+n^2\pi^2}[-1+(-1)^n\mathrm{e}^{-3}]\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{1}{6}(1-\mathrm{e}^{-3})+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-3}]}{n^2\pi^2+9}\cos n\pi x-\frac{n\pi[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-3}]}{n^2\pi^2+9}\sin n\pi x\right\}.$$

(5) $a_0=\dfrac{1}{T}\int_{-T}^T f(x)\mathrm{d}x=C$,

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^T f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}\mathrm{d}x=\frac{C}{n\pi}[-1+(-1)^n]\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$f(x)\sim\frac{C}{2}-\frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{T}x.$$

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<T_0,\\ 5\sin\omega t, & T_0\leqslant t<T,\end{cases}$$

其中 ω 为圆频率，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 现设初始导通时间 $T_0=\frac{T}{8}$（见图 16.1.2），求 $I(t)$ 在 $[0,T]$ 上的 Fourier 级数.

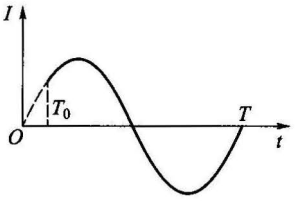


图 16.1.2

解　$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\frac{5(\sqrt{2}-2)}{2\pi}$,

$$a_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi x}{T}\mathrm{d}x=-\frac{5}{4\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]$$

$(n=2,3,4,\cdots)$,

$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi x}{T}\mathrm{d}x=\frac{5(7\pi+2)}{8\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x=\frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]$$

$(n=2,3,4,\cdots)$.

$$f(x)\sim-\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2})-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\left(\frac{5}{4\pi}+\frac{35}{8}\right)\sin\omega t+$$

$$\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t+$$

$$\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，证明：

（1）若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=f(x+\pi)$，则 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

（2）若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=-f(x+\pi)$，则 $a_{2n}=b_{2n}=0$.

证　（1）$a_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos[(2n-1)t-(2n-1)\pi]\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\quad(\text{令 }t=x+\pi)$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_{2n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\sin[(2n-1)t-(2n-1)\pi]\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+\pi)$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

(2) $$a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-f(t)\cos(2nt-2n\pi)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+\pi)$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-f(t)\sin(2nt-2n\pi)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+\pi)$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

9. 设$f(x)$在$(0,\pi/2)$上可积或绝对可积,应分别对它进行怎样的延拓,才能使它在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数的形式为

(1) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$; (2) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$.

解 (1) 显然,$f(x)$为偶函数,而且

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x(\text{令 } t=\pi-x)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(\pi-x)]\cos(2nx)\,\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0,$$

于是$f(x)$可以按下面方式进行延拓:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}-f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\\ f(-x), & x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\\ f(x), & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ -f(\pi-x), & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).\end{cases}$$

(2) 显然,$f(x)$为奇函数,而且

$$\begin{aligned}b_{2n-1}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x(\text{令 }t=\pi-x)\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-t)\sin[(2n-1)t]\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(\pi-x)]\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0,$$

于是$f(x)$可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\\ -f(-x), & x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\\ f(x), & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ -f(\pi-x), & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).\end{cases}$$

10. 设周期为2π的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数为a_n和b_n,求下列函数的 Fourier 系数$\tilde{a}_n$和$\tilde{b}_n$:

(1) $g(x)=f(-x)$;　　(2) $h(x)=f(x+C)$(C是常数);

(3) $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\mathrm{d}t$　(假定积分顺序可以交换).

解　(1) $\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)\cos nx\mathrm{d}x(\text{令 }t=-x)$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}x,$$

所以

$$\tilde{a}_n=a_n(n=0,1,2,\cdots),$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(\text{令 }t=-x)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}x,$$

所以

$$\tilde{b}_n = -b_n (n=1,2,\cdots).$$

(2) 因为 $x+C\in[-\pi,\pi]$，所以 $x\in[-\pi-C,\pi-C]$.

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} h(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} f(x+C)\cos nx\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+C)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-C)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\cos nC\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\sin nC\mathrm{d}x$$

$$= a_n\cos nC + b_n\sin nC \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} h(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} f(x+C)\sin nx\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+C)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin n(t-C)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\cos nC\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\sin nC\mathrm{d}x$$

$$= b_n\cos nC - a_n\sin nC \quad (n=1,2,\cdots).$$

(3) $\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$

(交换次序)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t.$$

当 $n=0$ 时，

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_0 f(t)\mathrm{d}t = a_0^2,$$

当 $n>0$ 时，

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)[\cos n(x-t)\cos nt - \sin n(x-t)\sin nt]\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nt - b_n\sin nt)f(t)\mathrm{d}t = a_n^2 - b_n^2 \quad (n=1,2,\cdots).$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t\right]\sin nx\mathrm{d}x(\text{交换次序})$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sin nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)[\sin n(x-t)\cos nt + \cos n(x-t)\sin nt]\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_n\cos nt + a_n\sin nt)f(t)\mathrm{d}t = 2a_n b_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

§2　Fourier 级数的收敛判别法

1. 设 $\psi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=0.$$

证　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，所以存在 $N>0$，使得当 $x\geqslant N$ 时，$|\psi(x)|<1$. 利用积分第二中值定理可得

$$\begin{aligned}\left|\int_N^A\psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right| &= \left|\psi(N)\int_N^{\xi}\sin px\mathrm{d}x+\psi(A)\int_{\xi}^A\sin px\mathrm{d}x\right|\\ &<\left|\int_N^{\xi}\sin px\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\xi}^A\sin px\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{p}\quad(\forall A>N),\end{aligned}$$

因此 $\left|\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{p}$，从而

$$\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=0.$$

而由 Riemann 引理，

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=0.$$

因此

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin px\mathrm{d}x+\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=0.$$

2. 设函数 $\psi(u)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，在 $u=0$ 点连续且有单侧导数，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u.$$

证　$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{u\to0+}\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}} &= \lim_{u\to0+}\frac{\psi(u)-\psi(0)-[\psi(-u)-\psi(0)]}{u}\cdot\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\\ &=\psi'_+(0)+\psi'_-(0),\end{aligned}$$

可知函数 $\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上可积或绝对可积，由 Riemann 引理可得

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=0.$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\to 0\quad(p\to+\infty).$$

3. 设函数 $\psi(u)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上单调，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=0.$$

证

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\delta}\left\{[\psi(u)-\psi(0+)]+[\psi(-u)-\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\delta}[\psi(u)-\psi(0+)]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u+\int_0^{\delta}[\psi(-u)-\psi(0-)]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u,$$

因为 $\psi(u)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上单调，所以 $\psi(u)-\psi(0+)$ 和 $\psi(-u)-\psi(0-)$ 都在 $[0,\delta]$ 上单调，利用 Dirichlet 引理即得结论.

4. 证明：Dirichlet 引理对 $\psi(u)$ 是分段单调有界函数的情况依然成立.

证 由于 $\psi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 分段单调，所以存在 $\delta_1\in(0,\delta)$，使得 $\psi(u)$ 在 $[0,\delta_1]$ 上单调，从而满足 Dirichlet 引理条件. 由于在 $[\delta_1,\delta]$ 上 $\psi(u)$ 分段单调有界，所以 $\dfrac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}$ 在 $[\delta_1,\delta]$ 上满足 Riemann 引理条件. 于是

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u$$

$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^{\delta_1}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u+\lim_{p\to\infty}\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=0.$$

5. 证明 Lipschitz 判别法的推论.

证 取 $\alpha=1$. 设 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x+u)-f(x+)}{u}=A$，则存在 $\delta_1>0$，当 $0<u<\delta_1$ 时，成立

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}-A\right|\leqslant 1,$$

令 $L_1=|A|+1$，则有

$$|f(x+u)-f(x+)|\leqslant L_1|u|.$$

同理存在 $\delta_2>0$ 与 $L_2>0$，当 $0<u<\delta_2$ 时，有

$$|f(x-u)-f(x-)|\leqslant L_2|u|.$$

于是令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$L=\max\{L_1,L_2\}$，当 $0<u<\delta$ 时，有

$$|f(x\pm u)-f(x\pm)|\leqslant L|u|,$$

所以 $f(x)$ 满足 Lipschitz 判别法的条件，推论成立.

6. 对本章 §1 的习题 2,3,4,6 中的函数，验证它们的 Fourier 级数满足收敛判别法的条件，并分别写出这些 Fourier 级数的和函数.

解　容易验证这些函数都是分段单调有界的，因而可积或绝对可积，所以满足 Dirichlet – Jordan 判别法的条件.

习题 2 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\begin{cases}1, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ -1, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$　　(2) $|\cos x|, x\in[-\pi,\pi]$.

(3) $\frac{x^2}{2}-\pi^2, x\in[-\pi,\pi]$.

(4) $\begin{cases}0, & x\in[0,\pi),\\ -\frac{\pi}{2}, & x=\pm\pi,\\ x, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$　　(5) $\begin{cases}bx, & x\in[0,\pi),\\ (b-a)\frac{\pi}{2}, & x=\pm\pi,\\ ax, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$

习题 3 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\begin{cases}x+\pi, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ x-\pi, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}e^{-2x}, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ -e^{2x}, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\pm\pi,\\ \pi, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\\ -\pi, & x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,x\in[1,2]\cup[-2,-1],\\ -\cos\frac{\pi x}{2}, & x\in(-1,0).\end{cases}$

习题 4 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\pi|x|-x^2, x\in[-\pi,\pi]$.

(2) $e^{|x|}, x\in[-\pi,\pi]$.

(3) $\begin{cases}\sin 2|x|, & x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),\\ 1, & x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right].\end{cases}$

(4) $|x|-\frac{\pi}{2}+\left||x|-\frac{\pi}{2}\right|, x\in[-\pi,\pi]$.

习题 6 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & x\in(0,2\pi),\\ 0, & x=0,2\pi.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2, & x\in(0,2\pi),\\ 2\pi^2, & x=0,2\pi.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x, & x\in(0,1),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,1.\end{cases}$ (4) $\begin{cases}e^{3x}, & x\in(-1,0),\\ 0, & x\in(0,1),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{e^{-3}}{2}, & x=\pm 1.\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}C, & x\in(-T,0),\\ 0, & x\in(0,T),\\ \dfrac{C}{2}, & x=0,\pm C.\end{cases}$

7. 利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$,证明:

(1) $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$; (2) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$.

证 (1) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{\pi^2}{24},$$

所以

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{2\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\pi^2}{24}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

8. 求 $\sin x$ 全部非零零点的倒数的平方和.

解 $\sin x$ 全部非零零点为$\{\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots\}$,所以其倒数的平方和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n\pi)^2}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3}.$$

9. 证明下列关系式:

(1) 对 $0<x<2\pi$ 且 $a\neq 0$,有

$$\pi e^{ax}=(e^{2a\pi}-1)\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right];$$

(2) 对 $0<x<2\pi$ 且 a 不是自然数,有

$$\pi\cos ax=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos nx+n(\cos 2a\pi-1)\sin nx}{a^2-n^2};$$

(3) 对(2),令 $x=\pi$,有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi}=1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

证　(1) $f(x)=\pi e^{ax}$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身．由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2}\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2}\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

可知式(1)成立.

(2) $f(x)=\pi\cos ax$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身．由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2}\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{n(\cos 2a\pi-1)}{a^2-n^2}\quad (n=1,2,3,\cdots),$$

可知式(2)成立.

(3) 对(2)，令 $x=\pi$，利用 $\sin 2a\pi=2\sin a\pi\cos a\pi$，有

$$\pi\cos a\pi=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos n\pi}{a^2-n^2}$$

$$=\frac{\sin a\pi\cos a\pi}{a}\left[1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right],$$

所以式(3)也成立.

10. (1) 验证函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dirichlet－Jordan 判别法条件而不满足 Dini－Lipschitz 判别法条件.

(2) 验证函数

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dini－Lipschitz 判别法条件(今后会学到，它不满足 Dirichlet－Jordan 判别法条件，在此从略).

证　(1) $f(x)$ 是偶函数，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$，且当 $x>0$ 时，$f'(x)=-\dfrac{1}{\left(\ln\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是分段单调的连续函数，满足 Dirichlet－Jordan 判别法条件．但对于任意的 $\alpha\in(0,1]$，由于 $\lim\limits_{u\to 0+} u^{\alpha}\ln\dfrac{u}{2\pi}=0$，所以

$$\frac{|f(0+u)-f(0+)|}{u^{\alpha}}=\frac{1}{u^{\alpha}\left|\ln\dfrac{u}{2\pi}\right|}$$

无界,因此$f(x)$在$x=0$点不满足 Dini - Lipschitz 判别法条件.

(2) 当$x\neq 0$时,$f'(x)=\cos\frac{\pi}{2x}+\frac{\pi}{2x}\sin\frac{\pi}{2x}$,导数存在;当$x=0$时,成立

$$|f(0\pm u)-f(0\pm)|=|x\cos\frac{\pi}{2x}|\leqslant|x|,$$

即满足 Lipschitz 条件,所以$f(x)$满足 Dini - Lipschitz 判别法条件. 今后会学到,对任意的$\delta>0$,$f(x)$在区间$[-\delta,\delta]$上不是有界变差函数,所以不能写成两个单调有界函数之差.

§3 Fourier 级数的性质

1. 由例 16.1.2 的结果

$$x\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\qquad x\in(-\pi,\pi),$$

用逐项积分法求x^2和x^3的 Fourier 级数.

解 由于x在$[-\pi,\pi]$上有界可积,其 Fourier 级数可以逐项积分,

$$\begin{aligned}x^2&=2\int_0^x t\mathrm{d}t=4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\mathrm{d}t\\&=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nx-1)\\&=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\text{(本章 §2 的习题 7(1))}\\&=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in[-\pi,\pi].\end{aligned}$$

对$3x^2$的 Fourier 级数逐项积分,

$$\begin{aligned}x^3&=3\int_0^x t^2\mathrm{d}t=3\int_0^x\frac{\pi^2}{3}\mathrm{d}t+12\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt\mathrm{d}t\\&=\pi^2x+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}\sin nx,x\in(-\pi,\pi).\end{aligned}$$

2. 证明定理 16.3.2 的推论 16.3.1:$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是某个在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛.

证 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

令

$$F(x)=\int_c^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t.$$

根据定理 16.3.2 的证明过程，$F(x)$ 满足 Dini－Lipschitz 判别法的推论的条件，$F(x)$ 可展开为收敛的 Fourier 级数

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),x\in[-\pi,\pi],$$

令 $x=0$，得到 $F(0)=\frac{A_0}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$，这就说明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

3. 说明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$ 点点收敛，但不可能是任何可积或绝对可积函数的 Fourier 级数.

解　对于任意固定的 x，$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\},\left\{\frac{1}{\ln\ln n}\right\}$ 单调趋于 0，$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$ 有界，根据 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$ 收敛.

因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\ln n}$ 都是发散的，所以这两个级数不可能是可积或绝对可积函数的 Fourier 级数.

4. 利用例 16.1.1 的结果

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

证　因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.$$

5. 利用例 16.1.2 的结果

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,\pi),\\ -x, & x\in[-\pi,0)\end{cases}\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

和 Parseval 等式，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

解　因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，由 Parseval 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right]^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\left(\frac{2}{3}\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^4}{96}.$$

6. 利用

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, x\in(-\pi,\pi)$$

和 Parseval 等式,求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解 因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积,由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\pi^4=2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\frac{2}{5}\pi^4-\frac{2}{9}\pi^4\right)\frac{1}{16}=\frac{\pi^4}{90}.$$

7. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期,且具有二阶连续导数的函数,记

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad b''_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

证明:若 $\sum_{n=1}^{\infty}b''_n$ 绝对收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right).$$

证 利用分部积分法,

$$\begin{aligned}b''_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{n}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]=-n^2b_n,\end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{|b_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|n^2b_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|n^2b_n|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b''_n|\right)\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}&\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right)<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right).\end{aligned}$$

8. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续函数. 证明:若 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零,则 $f(x)\equiv0$.

证 由于 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零,利用 Parseval 等式,可知 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0$. 再由 $f(x)$ 为连续函数,即可得到 $f(x)\equiv0$.

9. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的任意一个连续函数,证明对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在三角多项式

$$\psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证　设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

因为 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \dfrac{\varepsilon^2}{2\pi^2}$. 令

$$\psi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n > N),$$

则由定理 16.3.3，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)| \mathrm{d}x &\leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}x} \\ &= \sqrt{2\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \psi_n(x)|^2 \mathrm{d}x} < \varepsilon.\end{aligned}$$

§4　Fourier 变换和 Fourier 积分

1. 求下列定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < \delta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$　　(2) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}, a > 0$;

(3) $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}, a > 0$;　　(4) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} A\cos \omega_0 x, & |x| \leqslant \delta, \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$ $\omega_0 \neq 0$ 是常数，$\delta = \dfrac{\pi}{\omega_0}$.

解　(1) $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_0^{\delta} A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \dfrac{A}{\mathrm{i}\omega}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\delta})$.

(2) $\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{a-\mathrm{i}\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.\end{aligned}$

(3) $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2 - \mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos \omega x \mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\frac{\omega t}{\sqrt{a}}d\frac{t}{\sqrt{a}} \quad (\text{利用例 15.2.8 的结果})$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\left(\frac{\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

(4) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-(2+i\omega)x}dx=\frac{1}{2+i\omega}.$

(5) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\delta}^{\delta} A\cos\omega_0 x e^{-i\omega x}dx$

$$=\int_{-\delta}^{\delta} A\cos\omega_0 x\cos\omega x dx(\text{虚部为奇函数,积分为 0})$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\delta}^{\delta}[\cos(\omega_0-\omega)x+\cos(\omega_0+\omega)x]dx$$

$$=A\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\delta}{\omega-\omega_0}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\delta}{\omega+\omega_0}\right].$$

2. 求 $f(x)=e^{-ax}(x\in[0,+\infty),a>0)$ 的正弦变换和余弦变换.

解 正弦变换:

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x dx=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin\omega x dx=\frac{\omega}{a^2+\omega^2},$$

余弦变换:

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x dx=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos\omega x dx=\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

3. 设 $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}f_2(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $f_1*f_2(x)$.

解 记 $F(x)=f_1*f_2(x)=f_2*f_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t f_1(x-t)dt$,考虑 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

当 $x\leqslant 0$ 时,$f_1(x-t)=0$,所以 $F(x)=0$;

当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时,$f_1(x-t)=e^{-(x-t)}$,所以

$$F(x)=e^{-x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin t dt=\frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}});$$

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$f_1(x-t)=\begin{cases}e^{-(x-t)}, & x>t,\\ 0, & x\leqslant t,\end{cases}$ 所以

$$F(x)=e^{-x}\int_0^{x} e^t\sin t dt=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}).$$

于是

$$f_1*f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}), & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}}), & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

§5　快速 Fourier 变换

1. 说明离散 Fourier 变换 $X(j)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

的离散近似形式的推广.

解　假设 $\omega>0$,且有

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{\omega x}{2\pi}}\mathrm{d}x\approx\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\omega n\Delta x}{2\pi}\right)}\Delta x,$$

取 Δx 使 $\frac{\omega\Delta x}{2\pi}=\frac{1}{N}$,记 $W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}$,则 k 为整数时,$W^{kN+n}=W^n$. 于是

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x,$$

记 $x(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x$,所以

$$X(j)=\hat{f}(j\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^{jn}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}.$$

2. 证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}.$$

解　显然,$j=k$ 时,$\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nk}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{nk}{N}}=1$.

下面考虑 $j\neq k$,不妨设 $j<k$. 根据当 $\xi\neq1$ 是方程 $x^N=1$ 的一个根时,有 $\sum\limits_{n=0}^{N-1}\xi^n=0$,令 $\xi=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{(k-j)}{N}}\neq1$,则 $\xi^N=\mathrm{e}^{2(k-j)\pi\mathrm{i}}=1$. 于是

$$\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{nk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{n(k-j)}{N}}=0.$$

3. 设 $N=pq(p,q\in\mathbf{N})$,构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换算法.

解　令 $W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}$,则 k 为整数时,$W^{kN+n}=W^n$. 假设

$$j=j_1q+j_0,j_1=0,1,\cdots,p-1,j_0=0,1,\cdots,q-1,$$

$$n=n_1p+n_0,n_1=0,1,\cdots,q-1,n_0=0,1,\cdots,p-1.$$

$$\begin{aligned}X(j)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{jn}\\&=\sum_{n_0=0}^{p-1}\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{j(n_1p+n_0)}\\&=\sum_{n_0=0}^{p-1}W^{jn_0}\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}.\end{aligned}$$

固定 j,计算 $\sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}$ 需要 $q-1$ 次乘法($n_1=0$ 不需要做乘法),对于相同的 j_0,$\sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}$ 是相同的,无需重复计算,所有此类和式共需 $q(q-1)$ 次乘法. 对 n_0 求和需要 $(p-1)N$ 次乘法,所以,总共需要 $q(q-1)+(p-1)N=O((p+q)N)$ 次乘法.

4. 对 $N=2^3$,具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程.

解 记 $W=e^{-\frac{2\pi i}{8}}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$,则 $W^4=-1$,$W^8=1$. 可得计算公式

$$X(j)=\sum_{n=0}^{7} x(n)W^{jn} \quad (j=0,1,\cdots,7)$$

$$=[x(0)+(-1)^j x(4)]+W^j[x(1)+(-1)^j x(5)]+$$
$$W^{2j}\{[x(2)+(-1)^j x(6)]+W^j[x(3)+(-1)^j x(7)]\}.$$

计算流程

第一步:

$$x_1(i)=x(i)+x(i+4),$$
$$x_1(i+4)=W^i[x(i)-x(i+4)],i=0,1,2,3.$$

第二步:

$$x_2(i)=x_1(i)+x_1(i+2),$$
$$x_2(i+2)=W^{2i}[x_1(i)-x_1(i+2)],i=0,1,4,5.$$

第三步:

$$X(i)=x_2(i)+x_2(i+1),$$
$$X(i+4)=x_2(i)-x_2(i+1),i=0,2,$$
$$X(i)=x_2(i+3)+x_2(i+4),$$
$$X(i+4)=x_2(i+3)-x_2(i+4),i=1,3.$$

计算实习题

(在教师的指导下,编制程序在电子计算机上实际计算)

1. 利用现成的数学通用软件(如 MATLAB、Mathematica、Maple 等),对于 $N=32,64,128$,

(1) 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$;

(2) 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$;

(3) 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析(参见图 16.5.4);

(4) 设定 $\delta_0>0$,将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零,再进行离散 Fourier 逆变换,将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较;

(5) 改变 δ_0 的值,重复(4),分析不同的 δ_0 对逆变换所得到的数据的影响.

解 源程序为

```
function ex1601(N)
t=0:N-1;
x=randn(N,1)*20;% randn
```

```
y = fft(x,N);
z = abs(y);
plot(t,x,'+',t,z,'o')
%
delta = input('请输入误差');
for i = 0:N - 1
    if z(i + 1) < delta
      y(i + 1) = 0;
    end
end
z = real(ifft(y));
plot(t,x,'+',t,z,'o')
```

运行结果分析:以 N = 128 为例. 本程序数据是随机产生的,“+”为原始数据,“o”为变换后的模的数据. 如图 16.5.1 所示.

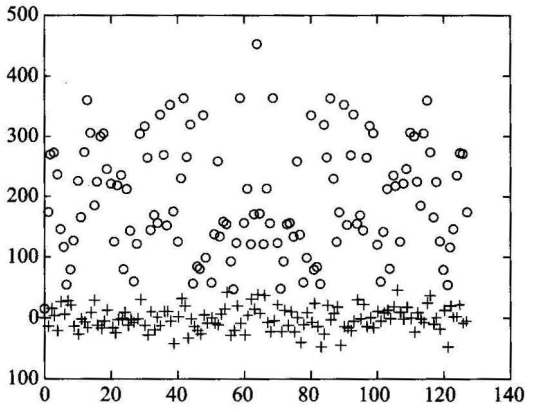


图 16.5.1

取 $\delta_0 = 5$,将$\{|X(j)|\}$中满足$|X(j)| < \delta_0$的数据全部置为零,再进行离散 Fourier 逆变换.“+”为原始数据,“o”为置零后变换得到的数据,与$\{x(k)\}$比较几乎重合. 如图 16.5.2 所示.

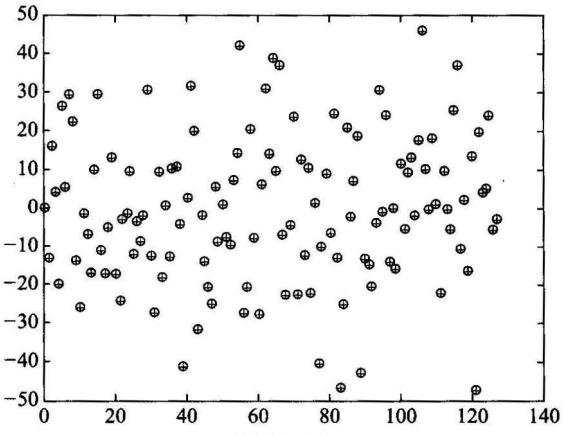


图 16.5.2

取 $\delta_0 = 50$,同样处理后得到的数据,与 $\{x(k)\}$ 比较有些小误差. 如图 16.5.3 所示.

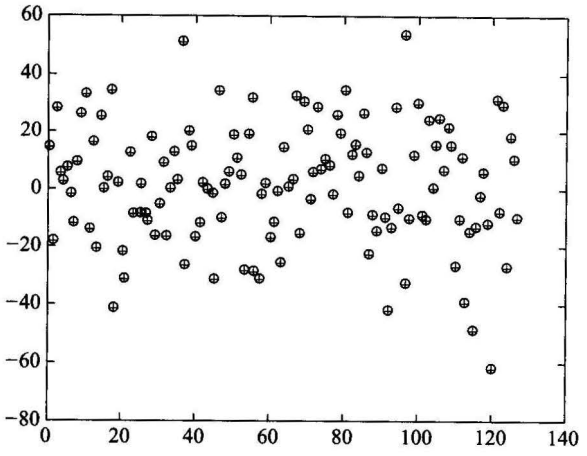


图 16.5.3

取 $\delta_0 = 100$,同样处理后得到的数据,与 $\{x(k)\}$ 比较误差清晰可见,但不是很大.
由于数据源不同,结果会有所差异. 如图 16.5.4 所示.

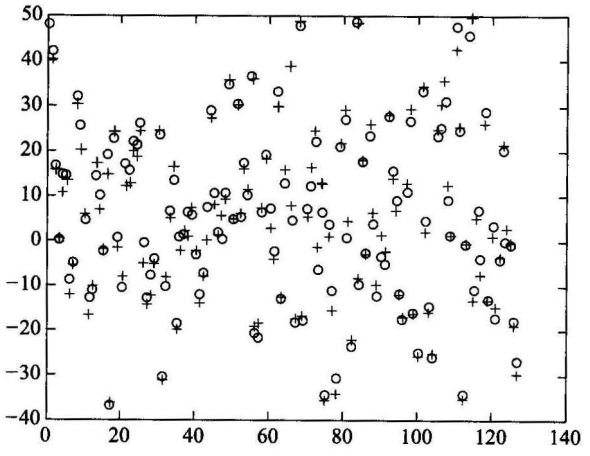


图 16.5.4

2. 对于 $N = 32, 64, 128$,

(1) 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$;

(2) 用直接方法计算 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的卷积 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$;

(3) 改用离散 Fourier 变换的思想,用 FFT 计算 $\{z(k)\}$;

(4) 结合 N 比较两种算法所用的时间.

解 源程序为

```
function t = ex1602(N)
x = randn(N,1) * 20;% randn
y = randn(N,1) * 20;% randn
tic % 启动秒表
for i = 0:N - 1
```

```
    z(i+1) =0;
    for j =0:i
        z(i+1) =z(i+1) +x(j+1) * y(i-j+1);
    end
    for j =i+1:N-1
        z(i+1) =z(i+1) +x(j+1) * y(N+i-j+1);
    end
end

t1 =toc;% 计时
tic;
x1 =fft(x,N);
y1 =fft(y,N);
z1 =ifft(x1. * y1);
t2 =toc;
t =[t1,t2];
```

分析：

计算所用时间与使用的计算机性能有关，由于计算机计时器的最小单位较大，对于较新的计算机，即使对于 $N=128$，所用时间几乎为 0. 而且由于卷积采用代码解释执行速度较慢，Fourier 变换采用内部函数速度很快，用 FFT 计算速度要快得多.

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积，并与 $\frac{\sin 2x}{2}$ 的Taylor级数的相应项比较.

解　源程序为

```
function [z,maxerror] =ex1603(m);
% z:乘积,maxerror;最大误差,m:阶数
len =4 * m +2;
a =zeros(len,1);% 被乘式系数
a(2) =1;
for i =4:2:2 * m +2
    a(i) = -1 * a(i-2)/(i-2)/(i-1);
end
b =zeros(len,1);% 乘式系数
b(1) =1;
for i =3:2:2 * m +1
    b(i) = -1 * b(i-2)/(i-2)/(i-1);
end
c =zeros(len,1);% 乘积系数
c(2) =1;
```

```
for i = 4:2:len
    c(i) = -4 * c(i-2)/(i-1)/(i-2);
end
x = fft(a,len);% Fourier 变换
y = fft(b,len);% Fourier 变换
z1 = x. * y;
z = ifft(z1);% Fourier 逆变换
maxerror = 0;
for i = 1:len
    e = abs(z(i) - c(i));
    if e > maxerror
      maxerror = e;
    end
end
```

计算结果误差分析：

m	误　差
1	0.05
2	0.001 587
3	2.756e-005
4	3.006e-007
5	2.248e-009
6	1.224e-011

随着 m 的增加，误差迅速减小.

部分补充习题答案与提示

第九章　数项级数

1. 设 $\forall n, a_n > 0$，证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}$.

提示：用反证法．若不然，则 $\exists N, \forall n > N, \left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n$．由此推出

$\dfrac{1}{n} + \dfrac{a_{n+1}}{n} < \dfrac{a_n}{n-1}$，$\sum\limits_{n=N+1}^{m}\dfrac{1}{n} + \sum\limits_{n=N+1}^{m}\dfrac{a_{n+1}}{n} < \sum\limits_{n=N+1}^{m}\dfrac{a_n}{n-1}$，于是 $\sum\limits_{n=N+1}^{m}\dfrac{1}{n} < \dfrac{a_{N+1}}{N} - \dfrac{a_{m+1}}{m} < \dfrac{a_{N+1}}{N}$，再令 $m\to\infty$，产生矛盾．

2. 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛能否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 收敛．

提示：结论不一定成立．

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_n \leqslant a_{2n} + a_{2n+1}$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散．

提示：令 $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \cdots, b_n = a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n-1}$，则数列 $\{b_n\}$ 单调增加．

5. 设 $a_n > 0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛．

提示：将通项的分子写成 $(1+a_n)-1$.

6. 设 $a_n > 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 也收敛．

提示：$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \dfrac{\sqrt[n]{a_1 \cdot 2a_2 \cdot 3a_3 \cdot \cdots \cdot na_n}}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n}$，

证明 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \mathrm{e}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \mathrm{e}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

8. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛，其中[ ]表示括号内数字的整数部分．

提示：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = \sum\limits_{n-1}^{\infty}(-1)^n\left\{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+2n}\right\}$，

$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n-1} < \dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n^2+n} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+2n} < \dfrac{1}{n}$，

于是$\frac{2}{n+1}<\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+2n}\right\}<\frac{2}{n}$.

9. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散.

提示：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t=I_1+I_2$,

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\mathrm{d}t=\frac{\pi^2 n}{2},$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3\mathrm{d}t=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2 n}{8}.$$

第十章　函数项级数

1. 讨论函数序列 $S_n(x)=n^{\alpha}x^{\beta}e^{-nx}(\alpha>0,\beta>0)$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

提示：当 $\alpha<\beta$ 时函数序列一致收敛. $S_n(x)$ 的最大值点为 $x=\frac{\beta}{n}$，则

$$0\leqslant S_n(x)\leqslant S_n\left(\frac{\beta}{n}\right)=\left(\frac{\beta}{e}\right)^{\beta}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\to 0.$$

当 $\alpha\geqslant\beta$ 时函数序列非一致收敛. $S_n(x)$ 的极限函数是 $S(x)=0$，取 $x_n=\frac{1}{n}$，则 $S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{en^{\beta-\alpha}}$ 不趋于零.

2. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$. 求证：函数序列 $\{\sqrt[n]{f(x)}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 若将闭区间 $[a,b]$ 改为开区间 (a,b)，问结论是否仍然成立？

提示：由 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，可知 $0<A\leqslant f(x)\leqslant B<+\infty$，于是有 $\sqrt[n]{A}\leqslant f_n(x)\leqslant\sqrt[n]{B}$，而 $\sqrt[n]{A}\to 1,\sqrt[n]{B}\to 1$.

若将闭区间 $[a,b]$ 改为开区间 (a,b)，则函数序列不一定一致收敛. 反例：$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$，区间为 $(0,1)$.

3. (1) 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}x^{\beta}e^{-nx}(\alpha>0,\beta>0)$ 在 $(0,1)$ 上的一致收敛性；

(2) 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}(1-x)^{\beta}x^{n}(\alpha>0,\beta>0)$ 在 $(0,1)$ 上的一致收敛性.

提示：(1) 当 $\beta-\alpha>1$ 时函数项级数一致收敛. $u_n(x)=n^{\alpha}x^{\beta}e^{-nx}$ 的最大值点为 $x=\frac{\beta}{n}$，则 $0\leqslant u_n(x)\leqslant u_n\left(\frac{\beta}{n}\right)=\left(\frac{\beta}{e}\right)^{\beta}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ 收敛.

当 $\beta-\alpha\leqslant 1$ 时函数项级数非一致收敛. 取 $x_n=\frac{1}{n}$，

$$\sum_{k=n}^{2n}u_k(x_n)=\sum_{k=n}^{2n}k^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}e^{-\frac{k}{n}}\geqslant\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{e^2n^{\beta-\alpha}}>\frac{1}{e^2n^{\beta-\alpha-1}}$$ 不趋于零.

(2) 方法与(1)相同.

6. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，证明 $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)f(x)=L$.

提示：$(1-x)f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=a_1x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})x^n$，

以 $x=1$ 代入幂级数，得到的数项级数收敛，于是极限号 $\lim\limits_{x\to 1-}$ 可以进入求和号.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

提示：计算 $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}$.

由于 $x>1$，$\frac{1}{t^x}$ 关于 t 单调下降趋于 0，于是有

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}<\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

8. 求 $x\to1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

提示：计算 $\int_1^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$.

由于 $0<x<1$，x^{t^2} 关于 t 单调下降趋于 0，于是有

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}x^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}},\text{等价于}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

9. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$，求当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 的等价量.

提示：计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2^t+x}$.

由于 $x>0$，$\frac{1}{2^t+x}$ 关于 t 单调下降趋于 0，于是有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2^t+x}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}<\frac{1}{1+x}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2^t+x},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2^t+x}=\int_0^{+\infty}\frac{2^{-t}\mathrm{d}t}{1+x2^{-t}}=\frac{\ln(1+x)}{x\ln2}.$$

由于 $\frac{1}{1+x}=\circ\left(\frac{\ln(1+x)}{x\ln2}\right)$，得到当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 与 $\frac{\ln(1+x)}{x\ln2}$ 等价.

10. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，证明函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限区间上一致收敛.

提示：$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=S(x)=\int_0^1f(x+t)\mathrm{d}t$，则

$$f_n(x)-S(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)-\int_0^1f(x+t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right)\mathrm{d}t.$$

设任意区间为 $[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in[a,b+1]$（$|x'-x''|<\delta$），成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

取 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$，$\forall n>N$，有 $\frac{1}{n}<\delta$，于是 $\forall x\in[a,b]$，成立 $|f_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

12. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛，$|f_n'(x)|\leqslant M$，证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

提示：$\forall\varepsilon>0$，将 $[a,b]$ 作等分，使全部 $\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3M}$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在这些分点 $\{x_i\}$ 上收敛，所以 $\exists N$，$\forall n,m>N$，在全部分点 $\{x_i\}$ 上成立 $|f_n(x_i)-f_m(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

$\forall x\in[a,b]$，$\exists x_i$，使得 $|x-x_i|<\frac{\varepsilon}{3M}$，则

$$|f_n(x)-f_n(x_i)|=|f_n'(\xi_i)(x-x_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\ |f_m(x)-f_m(x_i)|=|f_m'(\eta_i)(x-x_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_m(x_i)|+|f_m(x_i)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

第十二章　多元函数的微分学

8. 设四边形的边长分别为 a,b,c,d,问在什么情况下,该四边形面积最大?

提示:可以只考虑凸四边形的情况. 设四边形对角为 α,β,两角的夹边分别是 a,b 与 c,d.

应用 Lagrange 乘数法,求在条件 $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$ 下,目标函数 $f(\alpha,\beta)=ab\sin\alpha+cd\sin\beta$ 的最大值.

答案是 $\alpha+\beta=\pi$.

9. 二元函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数,并且 $f(1,0)=f(0,1)$,证明:在单位圆周上至少存在两点满足 $yf_x(x,y)=xf_y(x,y)$.

提示:令 $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$,则 $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(2\pi)$.

10. (1) 设 $a>b$,在平面上以 λ 为参数的曲线族的方程为 $\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=1$,证明:如果曲线族中两曲线相交,则一定正交.

(2) 设 $a>b>c$,在空间以 λ 为参数的曲面族的方程为 $\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1$,证明:如果曲面族中两曲面相交,则一定正交.

提示:(1) 设 (x_0,y_0) 为两曲线 $\frac{x^2}{a-\lambda_1}+\frac{y^2}{b-\lambda_1}=1$ 与 $\frac{x^2}{a-\lambda_2}+\frac{y^2}{b-\lambda_2}=1$ 的交点,证明

$$\left(\frac{x_0}{a-\lambda_1},\frac{y_0}{b-\lambda_1}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{a-\lambda_2},\frac{y_0}{b-\lambda_2}\right)=0.$$

(2)与(1)类似.

第十三章　重　积　分

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 为直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

提示：令 $\begin{cases} u=x+y, \\ v=x, \end{cases}$，则 $\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} \frac{u\ln\left(\frac{u}{v}\right)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D' 由直线 $u=v, v=0, u=1$ 围成，再利用 $\int_0^u \ln v\mathrm{d}v = u\ln u - u$.

第十四章　曲线积分、曲面积分与场论

8. $f(x,y)$是区域$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$上的二次可微函数，满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$，计算积分

$$I=\iint_D\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

提示：采用极坐标$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)r\mathrm{d}\theta=\int_0^1\mathrm{d}r\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}r\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第十五章　含参变量积分

1. 计算积分：

(3) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

提示：(3) $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$.

3. 引入参数计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

提示：令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，应用积分号内求导.

4. 设 $0<p<1$，计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x$.

提示：计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$，然后对参数 p 求导.

5. 讨论积分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\mathrm{d}x$ 的一致收敛性：

(1) $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A<+\infty$；

(2) $0<\alpha<+\infty$.

提示：(2) 积分非一致收敛. 取 $A_n' = n, A_n'' = 2n, \alpha_n = n$，则

$$\int_{A_n'}^{A_n''} x^{\alpha_n}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_n^{2n} x^n e^{-x}\mathrm{d}x \geqslant n\cdot n^n\cdot e^{-2n} \to +\infty.$$

6. 讨论积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2}$ 的一致收敛性：

(1) $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A<+\infty$；

(2) $0<\alpha<+\infty$.

提示：(2) 积分非一致收敛. 取 $A_n' = n, A_n'' = n^2, \alpha_n = n$，则

$$\int_{A_n'}^{A_n''} \frac{\alpha_n\mathrm{d}x}{x^2+\alpha_n^2} = \int_n^{n^2} \frac{n\mathrm{d}x}{x^2+n^2} = \left(\arctan\frac{x}{n}\right)\Big|_n^{n^2} = \arctan n - \frac{\pi}{4}\text{ 不趋于零}.$$

7. 讨论积分 $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$ 的一致收敛性：

(1) $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A<+\infty$；

(2) $0<\alpha<+\infty$.

提示：(2) 积分非一致收敛.

8. 讨论积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\alpha x}}{x(x^2+\alpha^2)}\mathrm{d}x$ 的一致收敛性：

(1) $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A<+\infty$；

(2) $0<\alpha<+\infty$.

提示：(2)积分非一致收敛.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581999　58582371　58582488

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn

通信地址　北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码　100120